

ΠΠΜ 220: Στατική Ανάλυση των Κατασκευών Ι

Διάλεξη 5^η και 6^η

Ανάλυση Ισοστατικών Δικτυωμάτων

Τετάρτη, 15, Παρασκευή, 17 Σεπτεμβρίου, 2004

Πέτρος Κωμοδρόμος

komodromos@ucy.ac.cy

<http://www.ucy.ac.cy/~petrosk>

ΠΡΟΣΚΛΗΣΗ

Με την έναρξη της νέας ακαδημαϊκής χρονιάς

το ακαδημαϊκό προσωπικό της
Πολυτεχνικής Σχολής

σας προσκαλεί σε δεξίωση γνωριμίας με τους
πρωτοετής φοιτητές και φοιτήτριες

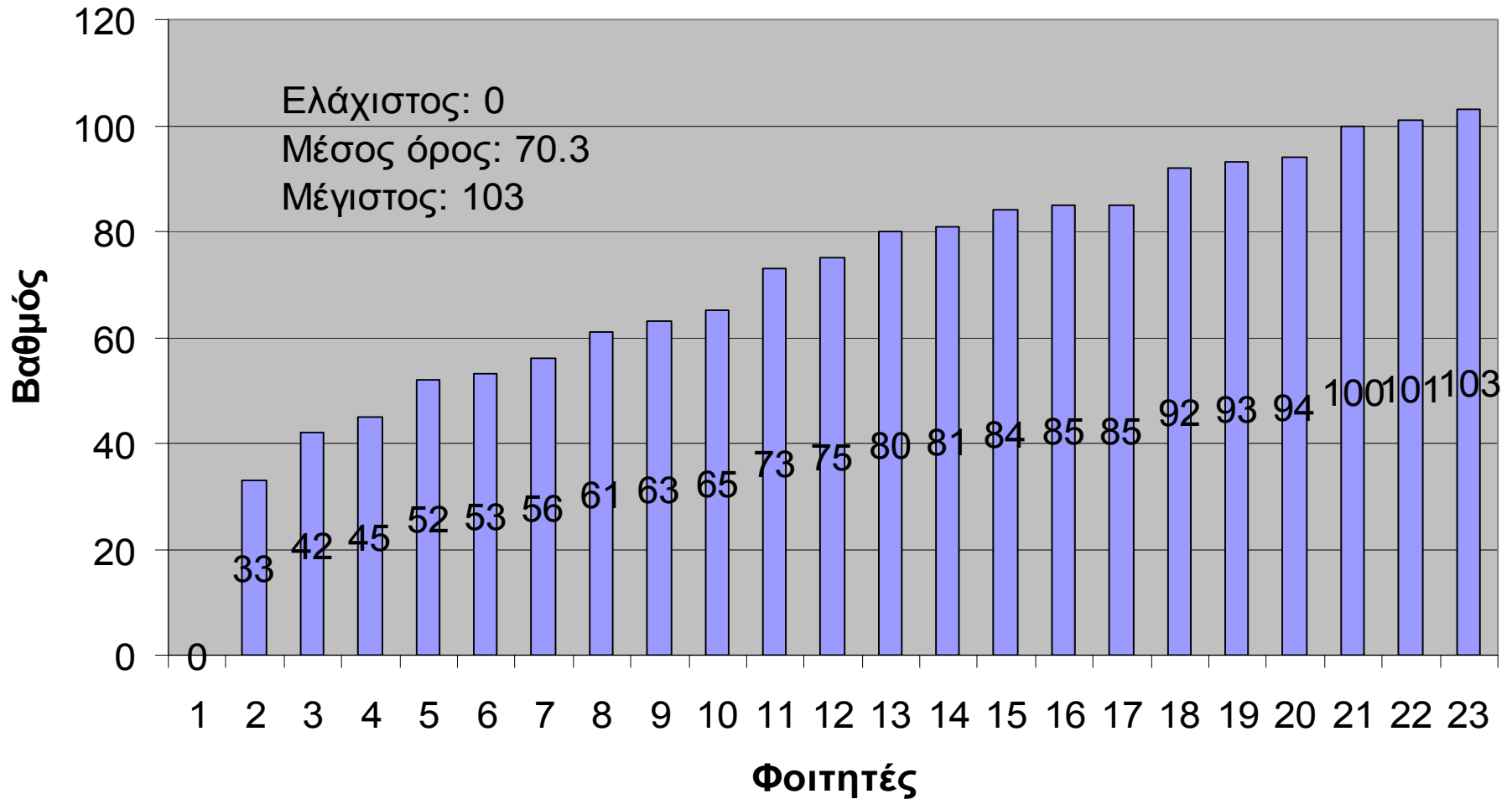
Τετάρτη 22 Σεπτεμβρίου 2004

Ώρα 6.30μμ

Αίθουσα Τελετών Πανεπιστημίου Κύπρου

1ο Ενδιάμεσο Διαγώνισμα

Βαθμολογία 1ου Διαγωνίσματος Στατικής Ανάλυσης Ι, 2004



Θέματα

- Εισαγωγή στα δικτυώματα
 - Θεωρήσεις
 - Συνδέσεις
- Τύποι δικτυωμάτων
- Βαθμοί στατικής αοριστίας δικτυωμάτων
- Ανάλυση δικτυωμάτων
- Μέθοδος των κόμβων
- Ράβδοι μηδενικής δύναμης
- Μέθοδος των τομών
- Σύνθετα δικτυώματα
- Πολύπλοκα δικτυώματα

Εισαγωγή στα δικτυώματα

- Θεωρήσεις για δικτυώματα:
 - χωρίς τριβή αρθρωτές συνδέσεις
 - κεντρικά συνδεόμενες ράβδοι
 - κομβικά επιβαλλόμενα φορτία
 - ασήμαντο σχετικά ιδιοβάρος ράβδων



⇒ αδυναμία μεταβίβασης ροπών

⇒ μόνο αξονικές εφελκυστικές/θλιπτικές δυνάμεις

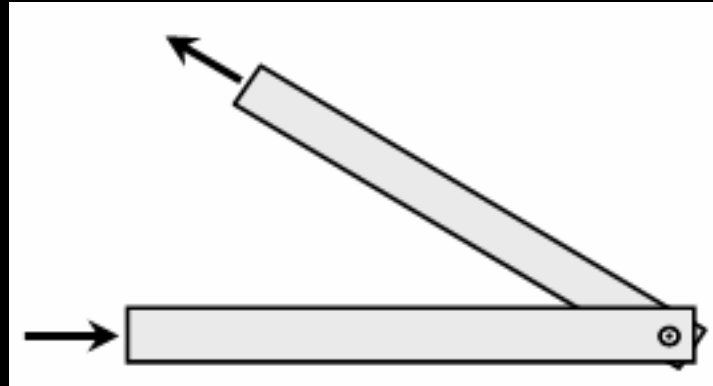
⇒ ομοιόμορφες εφελκυστικές/θλιπτικές τάσεις

⇒ βέλτιστη αξιοποίηση υλικού

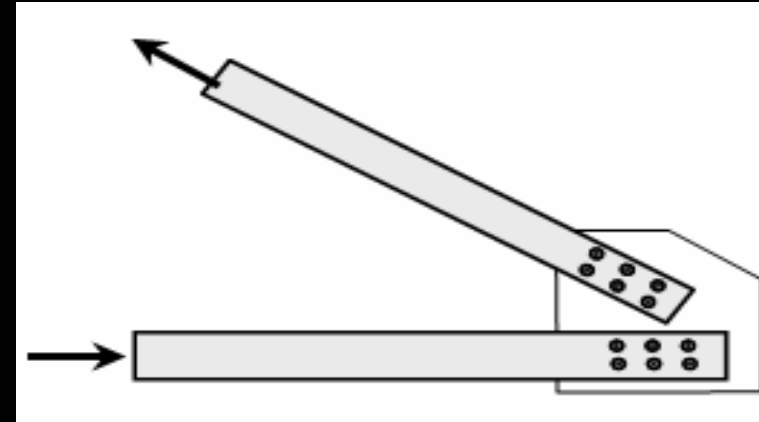
⇒ δυνατότητα κάλυψης μεγάλων ανοιγμάτων

Συνδέσεις ράβδων

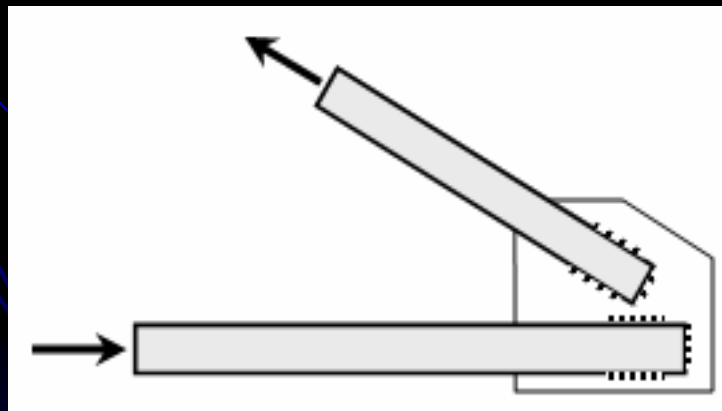
- Κοχλιώσεις
 - απευθείας



- με χρήση ελάσματος

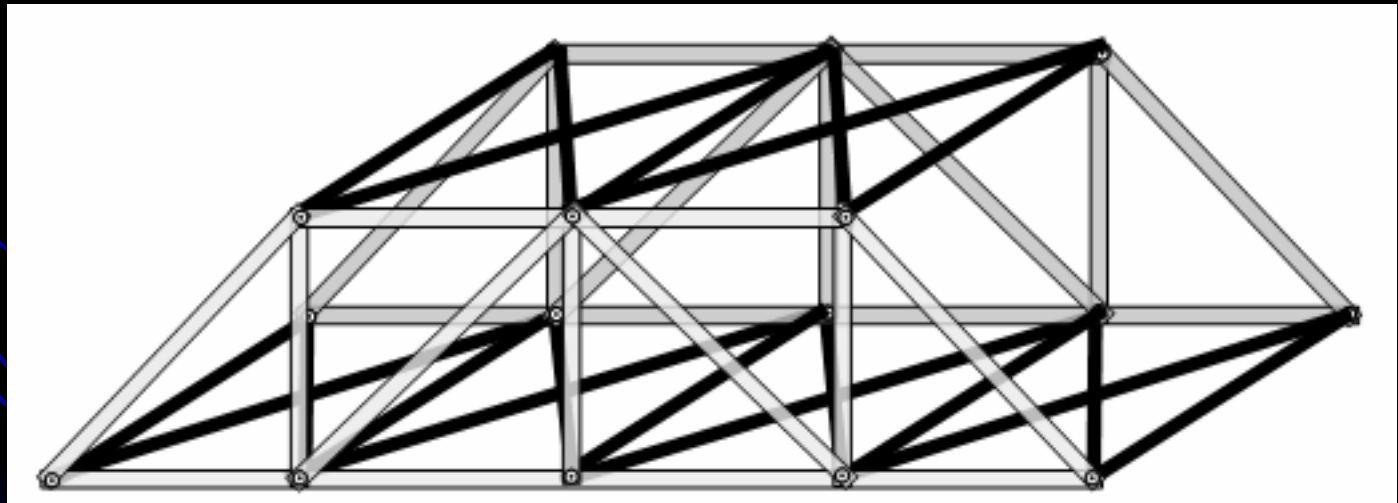
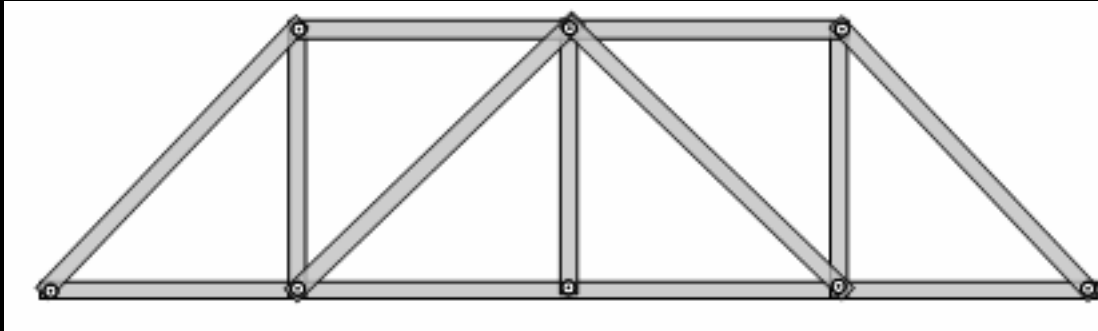


- Συγκολλήσεις



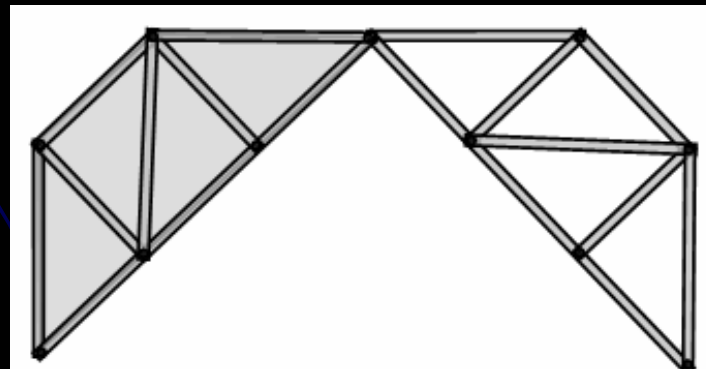
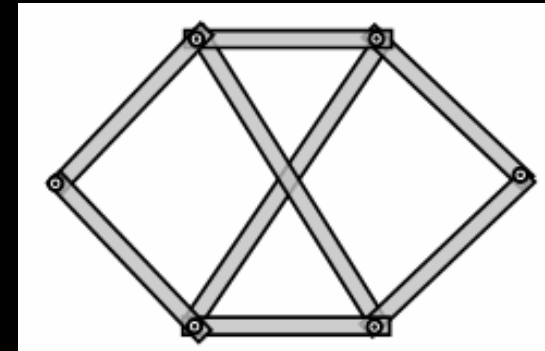
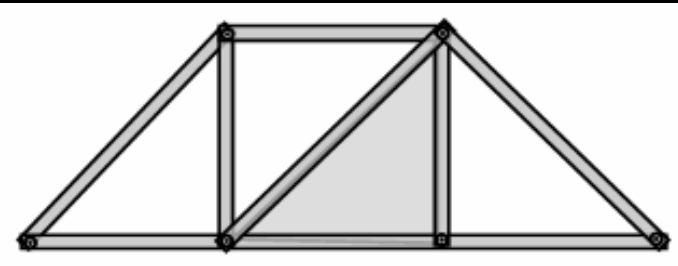
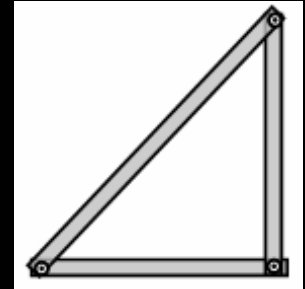
Εγκάρσιες συνδέσεις

- Συνδέσεις κάθετα στο επίπεδο ενός δικτυώματος με εγκάρσιες ράβδους



Τύποι δικτυωμάτων

- Χωρική κατηγοριοποίηση
 - *επίπεδα* δικτυώματα (δισδιάστατα)
 - *χωρικά* δικτυώματα (τρισδιάστατα)
- Κατηγοριοποίηση ανάλογα με πολυπλοκότητα
 - *απλά*: προκύπτουν από τη διαδοχική προσθήκη για κάθε δύο ράβδους ενός επιπλέον κόμβου στο βασικό δικτύωμα τρίγωνο
 - *σύνθετα*: συνδέοντας δύο ή περισσότερα απλά δικτυώματα
 - *πολύπλοκα*: ούτε απλά αλλά ούτε σύνθετα δικτυώματα



Ισοστατικότητα και βαθμοί στατικής αοριστίας δικτυωμάτων

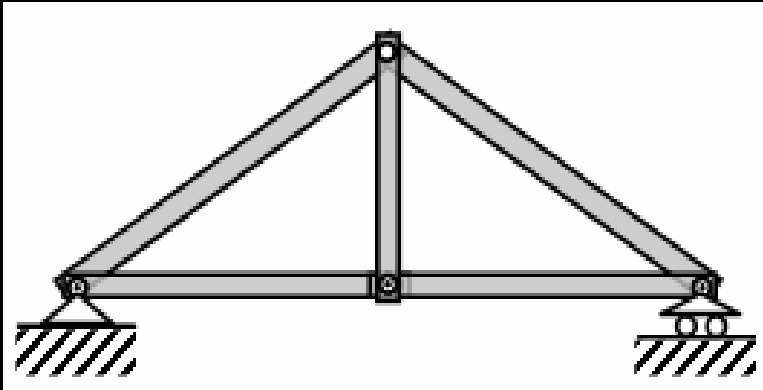
- $P + A < 2K \rightarrow$ μηχανισμός ή χαλαρό δικτύωμα
- ισοστατικός και ενδεχομένως σταθερό δικτύωμα $\rightarrow P + A = 2K$
- υπερστατικό και ενδεχομένως σταθερό δικτύωμα $\rightarrow P + A > 2K$
(βαθμός στατικής αοριστίας: $P + A - 2K$)

$\left[\begin{array}{l} P: \text{ άθροισμα των ράβδων} \\ A: \text{ άθροισμα των αγνώστων αντιδράσεων} \\ K: \text{ αριθμός κόμβων} \end{array} \right]$

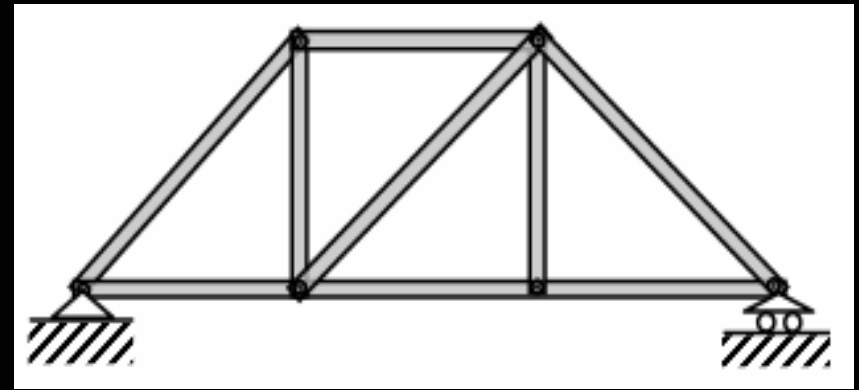
Σταθερότητα δικτυώματος

- **Εξωτερική:** πρέπει οι αντιδράσεις να μην:
 - συντρέχουν σε ένα σημείο
 - είναι παράλληλες
- **Εσωτερική:** κανένας κόμβος να μην μπορεί να μετακινηθεί ελεύθερα (πραγματοποιώντας κίνηση στερεού σώματος)

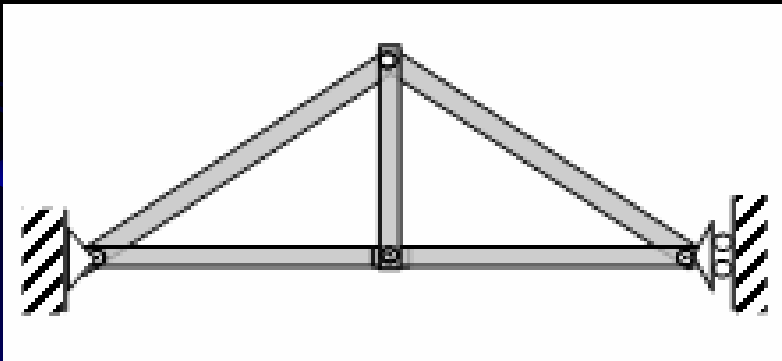
Παραδείγματα διερεύνησης της υπερστατικότητας



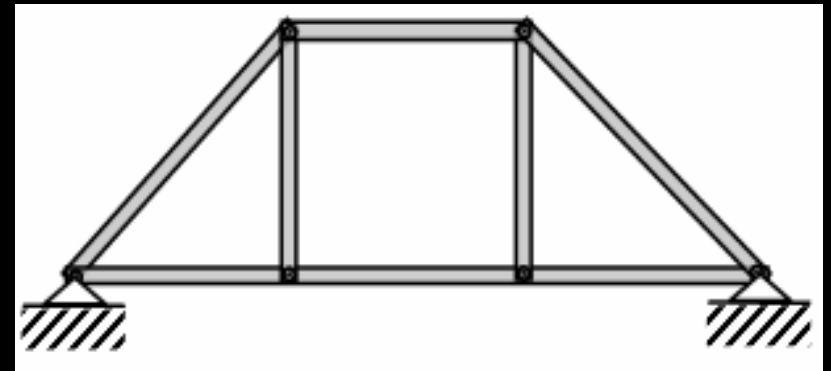
$P=5, A=3, K=4 \rightarrow$ ισοστατικό σταθερό



$P=9, A=3, K=6 \rightarrow$ ισοστατικό σταθερό



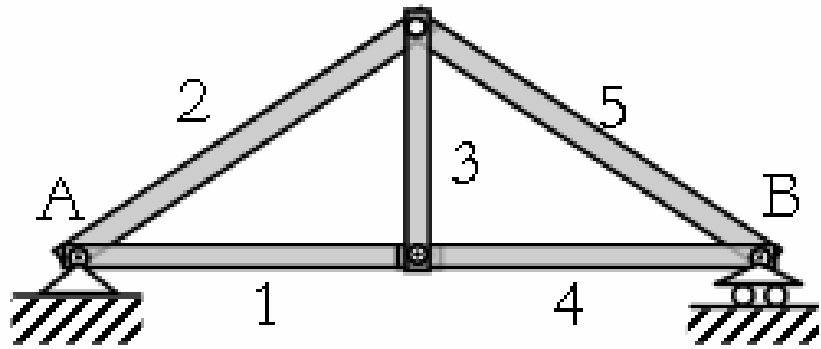
συντρέχουσες στηρίξεις
 \rightarrow μηχανισμός



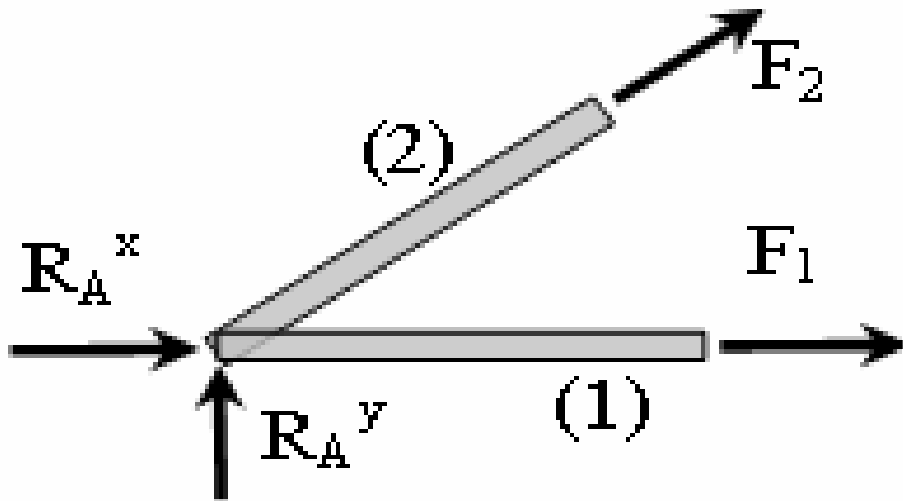
εσωτερικά ασταθές
 \rightarrow μηχανισμός

Ανάλυση δικτυωμάτων

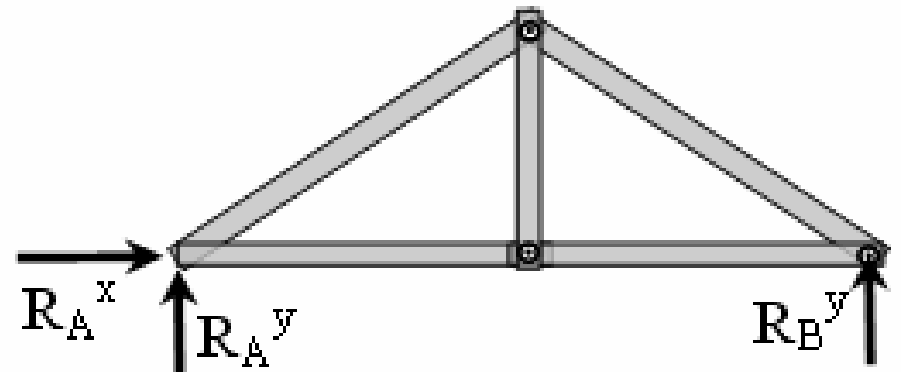
- *μέθοδος των κόμβων:*
 - απομόνωση και διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας ενός κόμβου
 - ⇒ χρησιμοποιείται όταν απαιτείται, και εφόσον είναι δυνατή με αυτή τη μέθοδο, η εύρεση των δυνάμεων όλων των ράβδων
- *μέθοδος των τομών:*
 - ισορροπία ενός τμήματος του δικτυώματος από νοητή τομή
 - ⇒ χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των δυνάμεων ορισμένων μόνο ράβδων ή όταν δεν είναι δυνατή η εύρεση όλων των δυνάμεων με τη χρήση της μεθόδου των κόμβων (π.χ. σύνθετα δικτυώματα)
- *συνδυασμός των δύο μεθόδων*
 - ⇒ για την ευκολότερη ανάλυση κάποιων ισοστατικών δικτυωμάτων



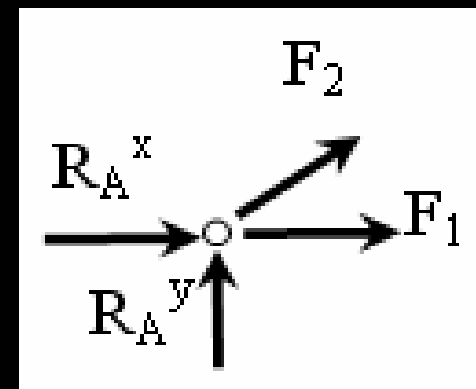
ΔΕΣ τμήματος δικτυώματος

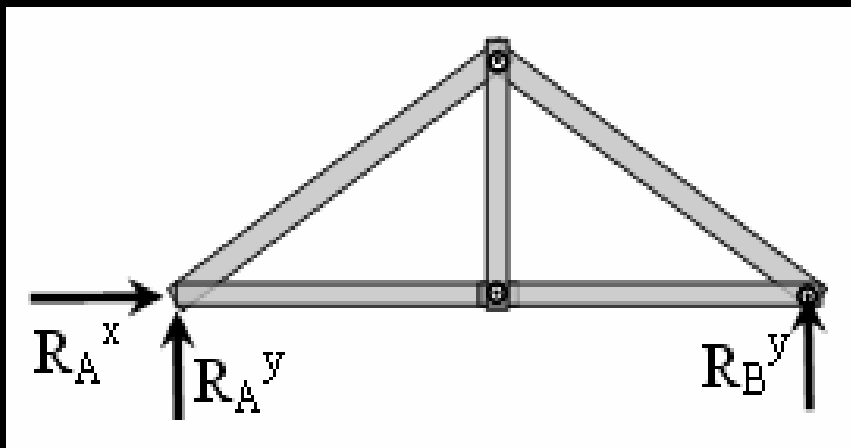


ΔΕΣ δικτυώματος



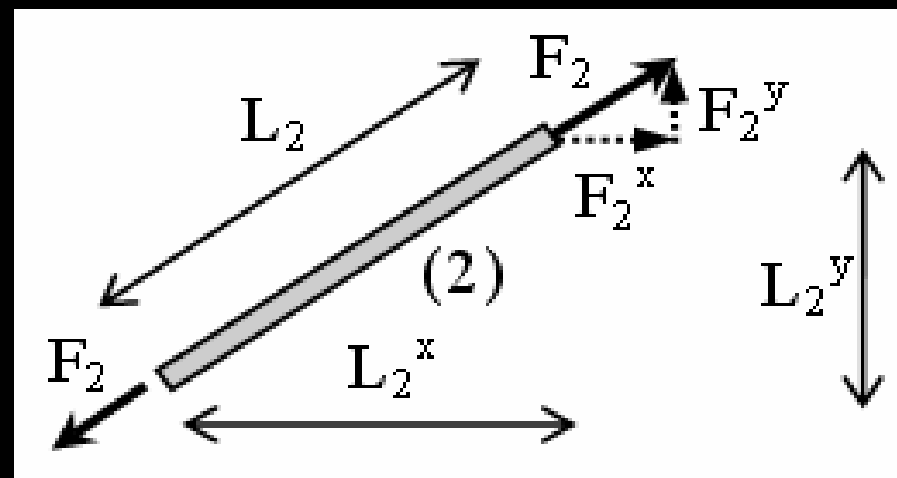
ΔΕΣ κόμβου δικτυώματος





ΔΕΣ δικτυώματος

ΔΕΣ ράβδου δικτυώματος



$$F_2^x = \frac{L_2^x}{L_2} \cdot F_2 \Leftrightarrow F_2 = \frac{L_2}{L_2^x} \cdot F_2^x$$

$$F_2^y = \frac{L_2^y}{L_2} \cdot F_2 \Leftrightarrow F_2 = \frac{L_2}{L_2^y} \cdot F_2^y$$

Μέθοδος των κόμβων

- Για να ισορροπεί ένα δικτύωμα

⇒ κάθε κόμβος του πρέπει να ισορροπεί

⇒ δύο εξισώσεις ισορροπίας για κάθε κόμβο

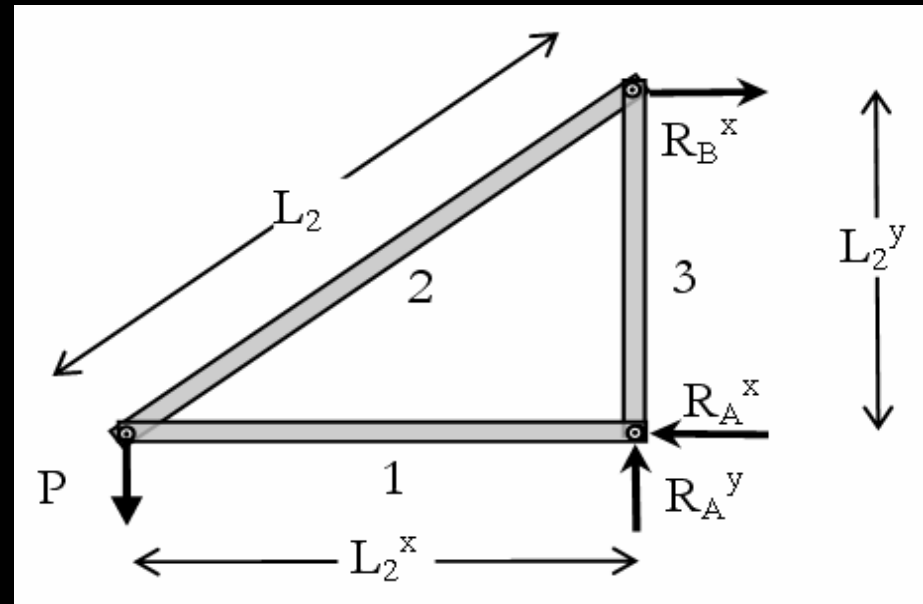
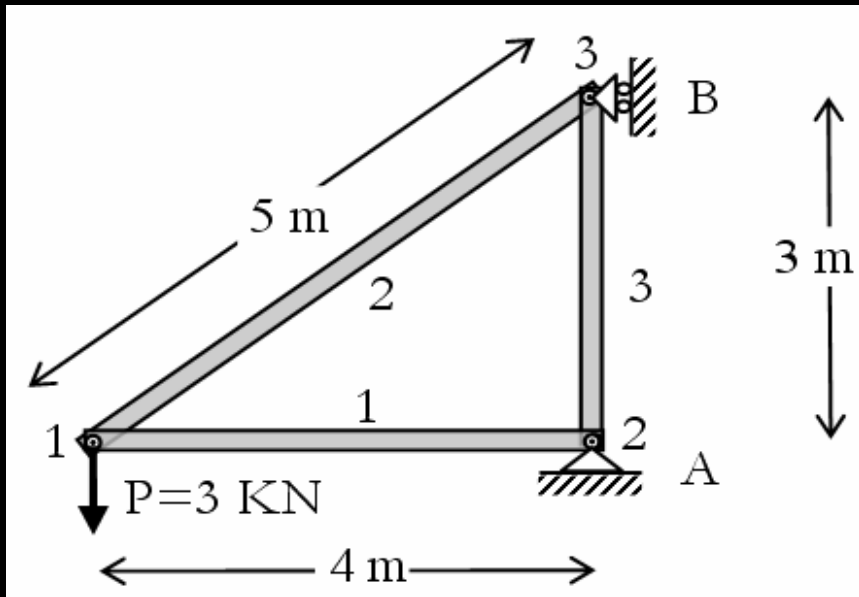
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right.$$

- Αυθαίρετη προσήμανση

⇒ Συνήθως, αν δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε την ορθή φορά:

- **εφελκυστικές:** οι δυνάμεις των ράβδων οι οποίες εφαρμοζόμενες πάνω στον κόμβο στον οποίο συντρέχουν φαίνονται να “τραβάνε” τον κόμβο
- **θλιπτικές:** δυνάμεις οι οποίες εφαρμοζόμενες πάνω στον κόμβο φαίνονται να “πιέζουν” τον κόμβο

Παράδειγμα-1



Εξισώσεις ισορροπίας:

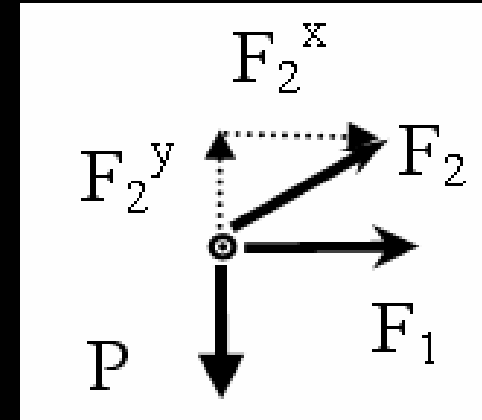
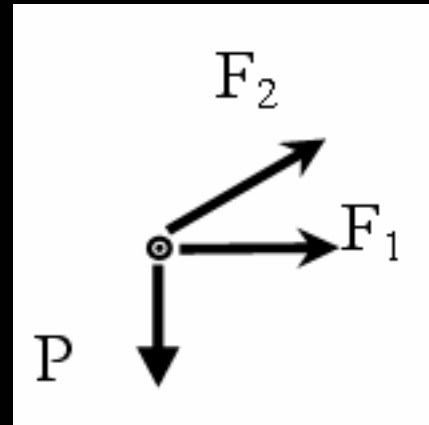
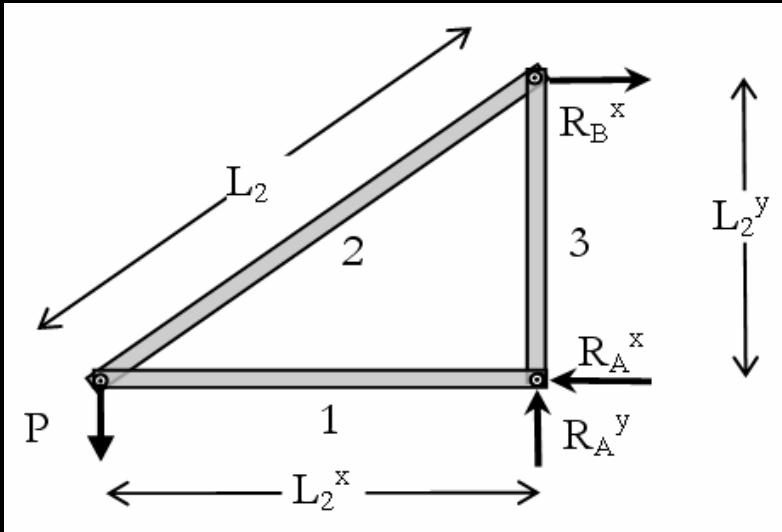
⇒ υπολογισμός των αντιδράσεων, στις στηρίξεις

$$\sum M_A^z = 0 \Rightarrow \underline{R_B^x = 4 \text{ KN}}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{R_A^x = 4 \text{ KN}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \underline{R_A^y = 3 \text{ KN}}$$

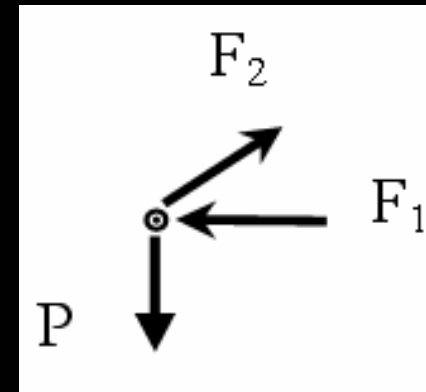
Παράδειγμα-1 (συν.)



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_2^x + F_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_2^y - 3 = 0 \Rightarrow F_2^y = 3 \text{ KN}$$

$$\Rightarrow F_2^x = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4 \text{ KN} \Rightarrow \underline{F_1 = -4 \text{ KN}} \Rightarrow \underline{F_2 = 5 \text{ KN}}$$



Ισοροπία κόμβου 3: θεωρώντας θλιπτική δύναμη \Rightarrow

$$\underline{F_3 = 4 \text{ KN}}$$

Ράβδοι μηδενικής δύναμης

Αφόρτιστες ράβδοι: μηδενικές αξονικές δυνάμεις υπό κάποιες φορτίσεις

- αν σε ένα κόμβο ο οποίος δεν δέχεται οποιοδήποτε εξωτερικό φορτίο, ή αντίδραση από στηρίξεις, συντρέχουν μόνο δύο ράβδοι τότε οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων αυτών είναι απαραίτητα μηδενικές.
- αν σε ένα κόμβο ο οποίος δεν δέχεται οποιοδήποτε εξωτερικό φορτίο, ή αντίδραση από στηρίξεις, συντρέχουν τρεις ράβδοι δύο εκ των οποίων είναι συγγραμμικές τότε η αξονική δύναμη της τρίτης ράβδου, η οποία δεν είναι συγγραμμική, είναι απαραίτητα μηδενική.

⇒ Σημαντική απλοποίηση της ανάλυσης ενός δικτυώματος με τον προσδιορισμό τυχόν αφόρτιστων ράβδων

Μέθοδος των τομών (Ritter)

- Για τον υπολογισμό των δυνάμεων συγκεκριμένων ράβδων

- Για να ισορροπεί ένα δικτύωμα

$$\sum F_x = 0$$

⇒ κάθε τμήμα του πρέπει να ισορροπεί

$$\sum F_y = 0$$

⇒ τρεις εξισώσεις ισορροπίας για κάθε τμήμα

$$\sum M_z = 0$$

- Προτιμότερο να μην τέμνουμε περισσότερες από 3 ράβδους άγνωστων δυνάμεων

⇒ αποφυγή σχηματισμού και επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων

- Αν τέμνονται τρεις ράβδοι με άγνωστες δυνάμεις, οι δύο να είναι παράλληλες

⇒ υπολογισμός τρίτης ράβδου από την εξίσωση ισορροπίας στην άλλη διεύθυνση

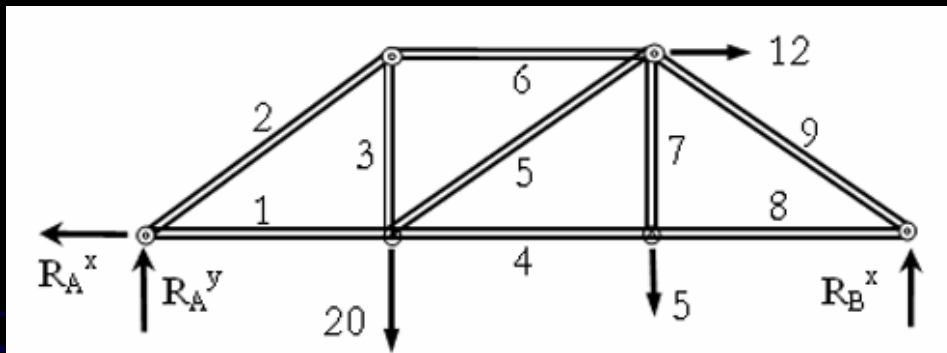
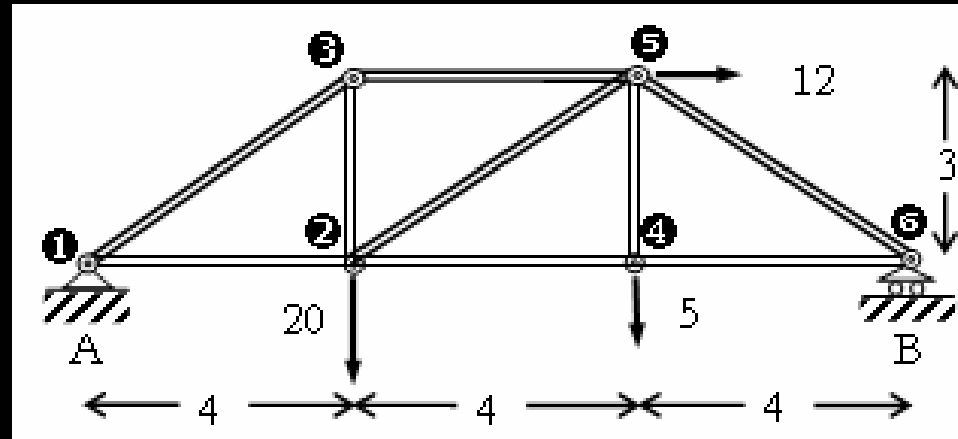
- Αν τέμνονται τρεις ράβδοι με άγνωστες δυνάμεις

⇒ υπολογισμός της μιας ράβδου να υπολογιστεί από την εξίσωση ροπής ως προς το σημείο στο οποίο συντρέχουν οι άλλες δύο ράβδοι.

Παράδειγμα-2

Εξισώσεις ισορροπίας στο ΔΕΣ

⇒ υπολογισμός αντιδράσεων

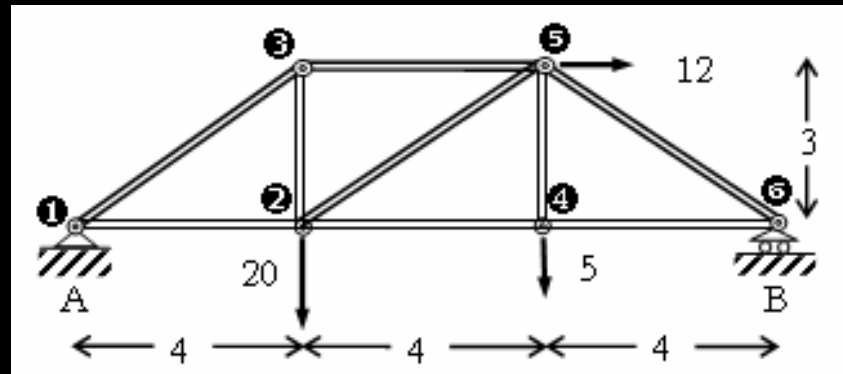


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{R_A^x = 12}$$

$$\sum M_A^z = 0 \Rightarrow 12 \times R_B^y = 4 \times 20 + 8 \times 5 + 3 \times 12 \Rightarrow \underline{R_B^y = 13}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A^y + R_B^y = 20 + 5 \Rightarrow \underline{R_A^y = 12 \text{ KN}}$$

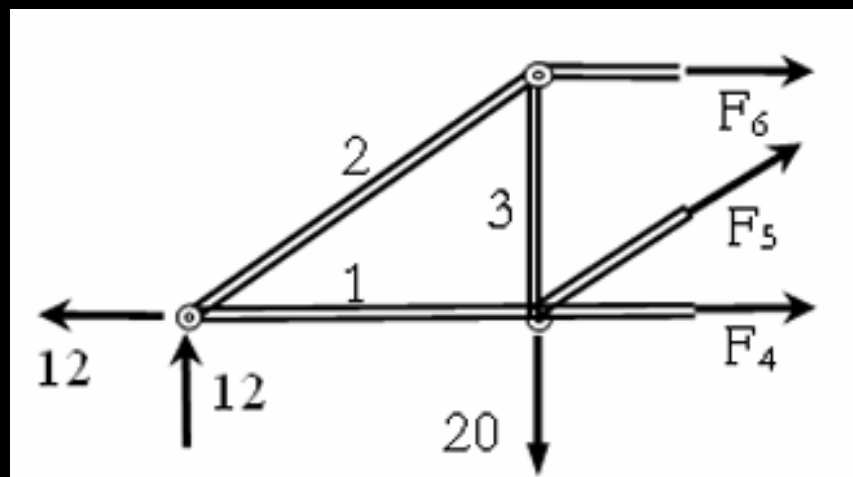
Παράδειγμα-2 (συν.)



Τομή στο μέσο του δικτυώματος

⇒ ΔΕΣ αριστερού τμήματος

⇒ χρήση εξισώσεων ισορροπίας

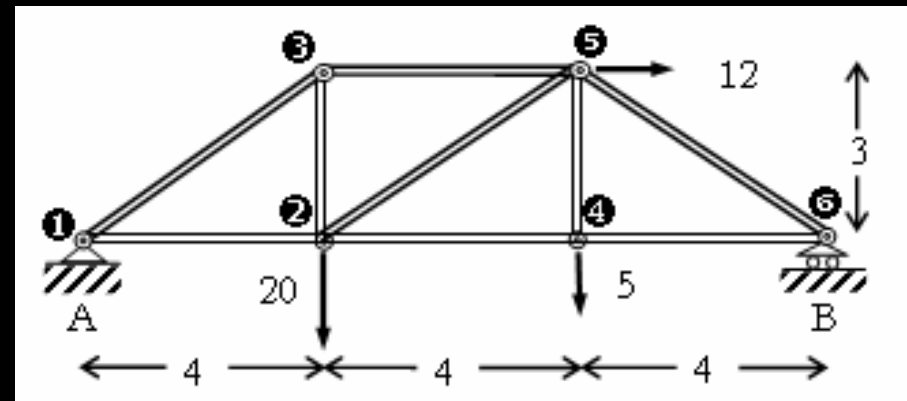


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_5^y = 20 - 12 \Rightarrow F_5 \times \frac{3}{5} = 8 \Rightarrow \underline{F_5 = \frac{40}{3} \text{ KN} = 13.33 \text{ KN}}$$

$$\sum M_2^z = 0 \Rightarrow 3 \times F_6 = -4 \times 12 \Rightarrow \underline{F_6 = -16 \text{ KN}} \quad (\text{Άρα είναι θλιπτική η δύναμη στη ράβδο 6})$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_4 + F_5^x + F_6 = 12 \Rightarrow F_4 = 12 - \frac{40}{3} \times \frac{4}{5} + 16 = 28 - \frac{32}{3} \quad \underline{F_4 = \frac{52}{3} \text{ KN} = 17.33 \text{ KN}}$$

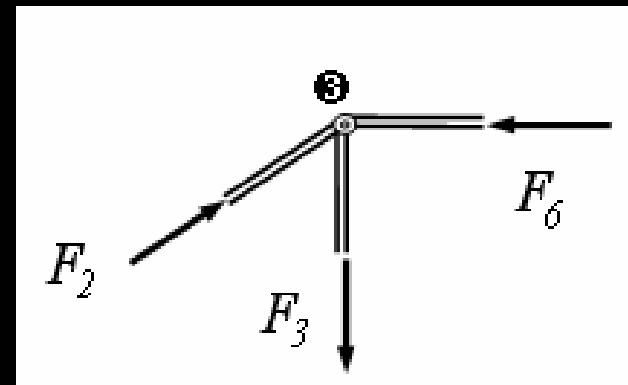
Παράδειγμα-2 (συν.)



Τομή στον κόμβο ③

⇒ ΔΕΣ κόμβου ③

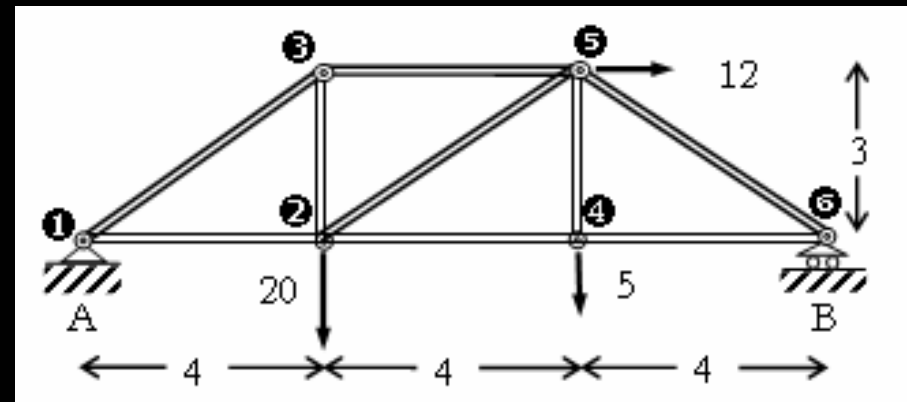
⇒ χρήση εξισώσεων ισορροπίας



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_2 \times \frac{4}{5} = F_6 = 16 \Rightarrow \underline{F_2 = 20 \text{ KN}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_3 = F_2 \times \frac{3}{5} = 20 \times \frac{3}{5} \Rightarrow \underline{F_3 = 12 \text{ KN}}$$

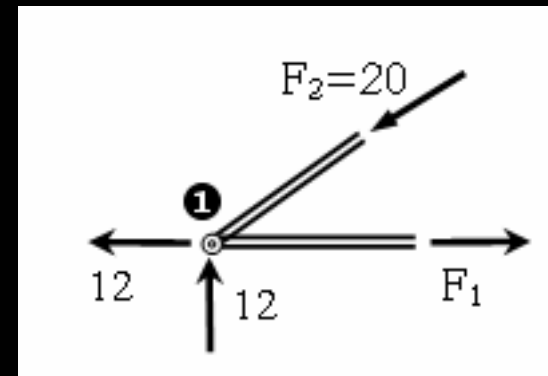
Παράδειγμα-2 (συν.)



Τομή στον κόμβο ①

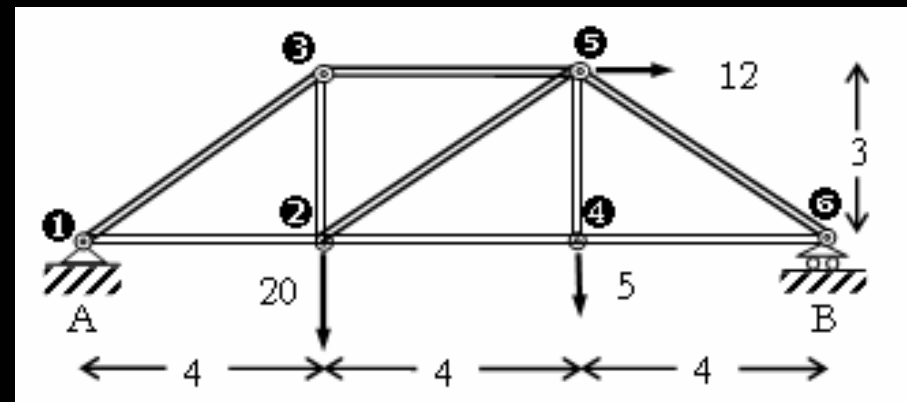
⇒ ΔΕΣ κόμβου ①

⇒ χρήση εξισώσεων ισορροπίας



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \times \frac{4}{5} + 12 = 20 \times \frac{4}{5} + 12 = 16 + 12 \Rightarrow \underline{F_1 = 28 \text{ KN}}$$

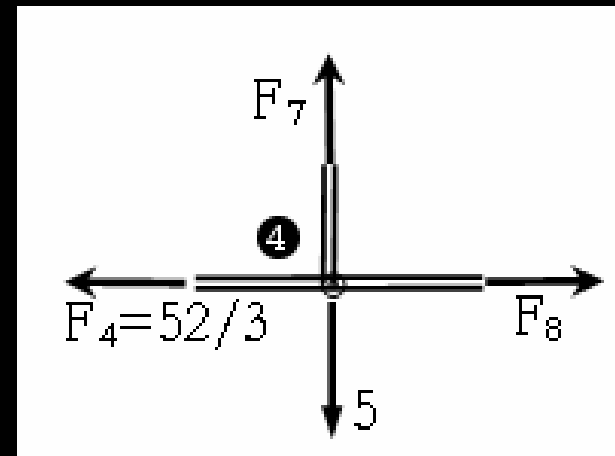
Παράδειγμα-2 (συν.)



Τομή στον κόμβο ④

⇒ ΔΕΣ κόμβου ④

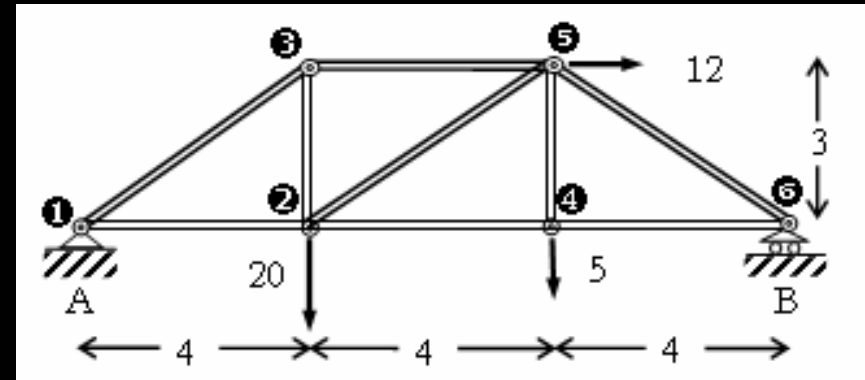
⇒ χρήση εξισώσεων ισορροπίας



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_8 = F_4 = \frac{52}{3} \Rightarrow \underline{\underline{F_8 = \frac{52}{3} \text{ KN}}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{F_7 = 5 \text{ KN}}}$$

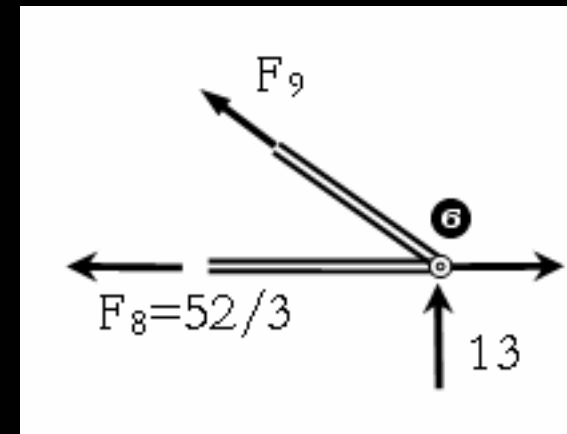
Παράδειγμα-2 (συν.)



Τομή στον κόμβο 6

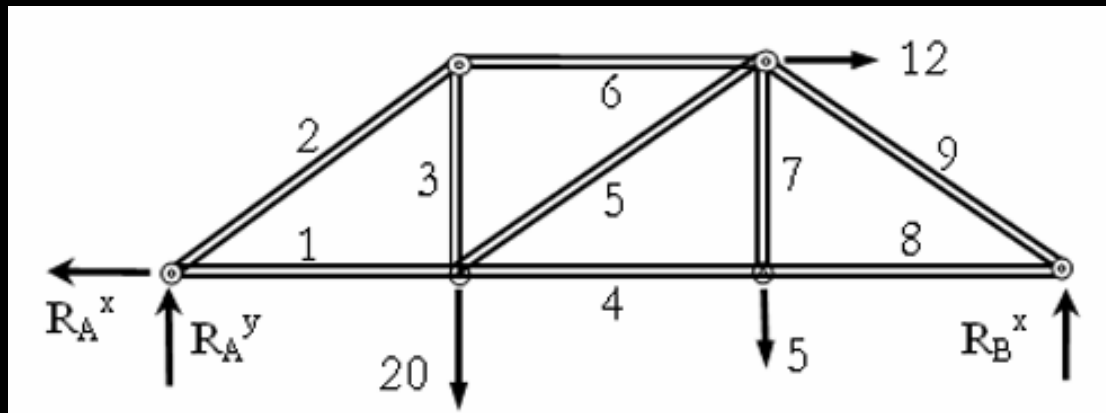
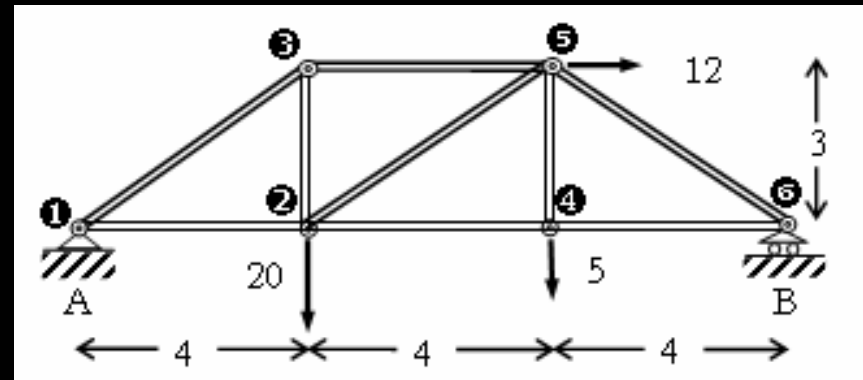
⇒ ΔΕΣ κόμβου 6

⇒ χρήση εξισώσεων ισορροπίας



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_9 \times \frac{4}{5} + F_8 = 0 \Rightarrow F_9 = -\frac{5}{4} F_8 = -\frac{5}{4} \times \frac{52}{3} = -\frac{65}{3} \quad \underline{\underline{F_9 = -\frac{65}{3} \text{ KN} = -21.67 \text{ KN}}}$$

Παράδειγμα-2 (συν.)

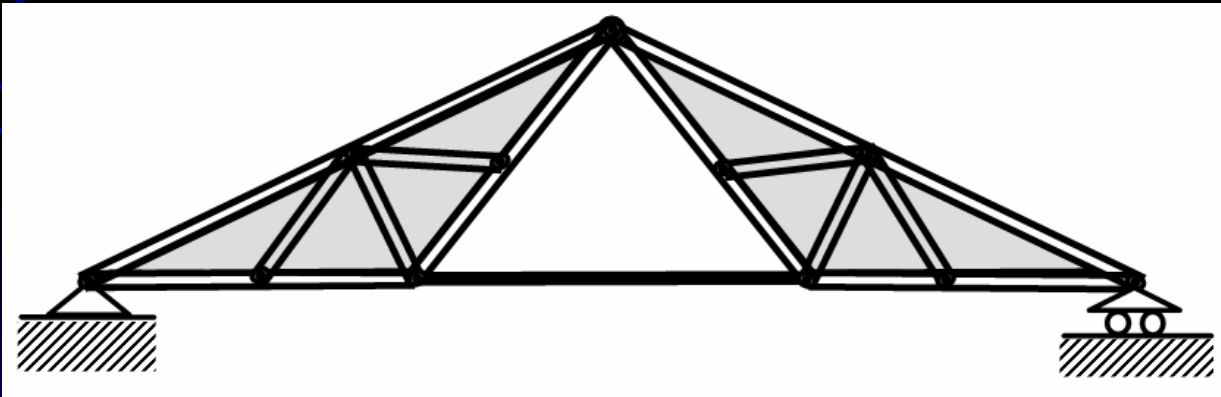


Αξονικές δυνάμεις ράβδων
(με αρνητικό πρόσημο υποδηλώνεται θλιπτική δύναμη)

Κόμβος	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9
Δύναμη	28	-20	12	$52/3$	$40/3$	-16	5	$52/3$	$-65/3$

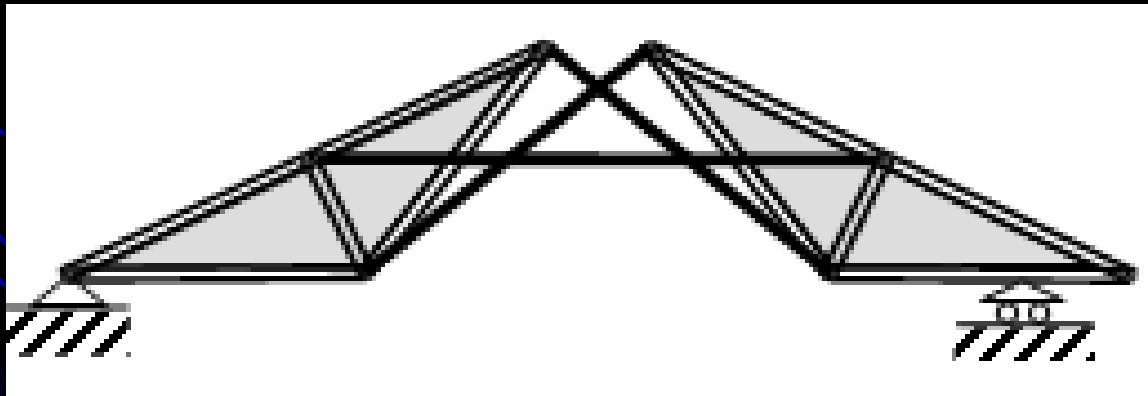
Σύνθετα δικτυώματα

- Σχηματίζονται από τη σύνδεση απλών δικτυωμάτων
- Διαφορετική διαδικασία επίλυσης ανάλογα με τον τρόπο σύνδεσης:
 - Σύνδεση απλών δικτυωμάτων με ένα κοινό σημείο και μια κοινή ράβδο
 - ⇒ πρέπει να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις με βάση τις εξισώσεις ισοροπίας ολόκληρου του φορέα
 - ⇒ ακολούθως, με χρήση της μεθόδου των τομών γίνεται τομή της ράβδου που συνδέει τα δύο απλά δικτυώματα και υπολογίζεται η αντίστοιχη δύναμη
 - ⇒ τότε είναι δυνατή η χρήση της μεθόδου των κόμβων για την πλήρη επίλυση των δύο απλών δικτυωμάτων



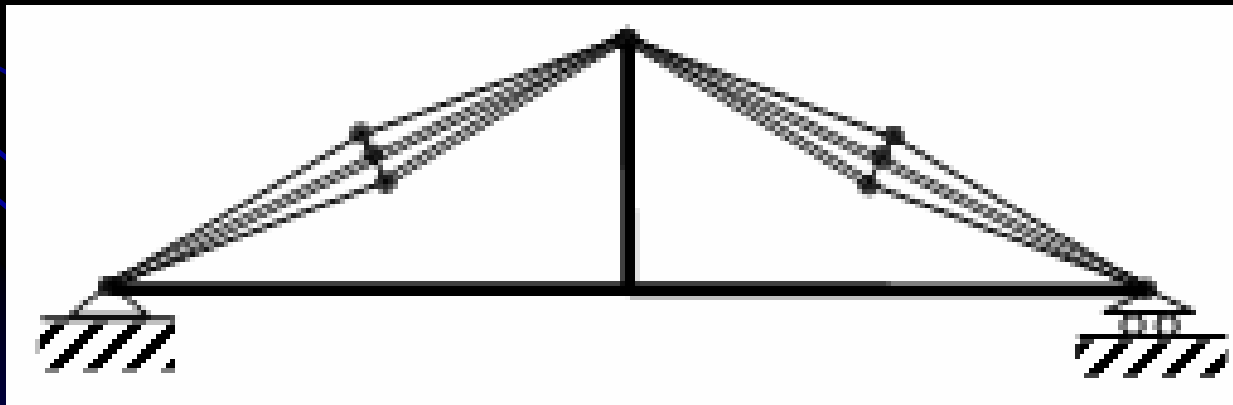
Σύνθετα δικτυώματα (συν.)

- Σύνδεση απλών δικτυωμάτων με τρεις μη παράλληλες και μη συντρέχουσες ράβδους
 - ⇒ πρέπει να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις με βάση τις εξισώσεις ισορροπίας ολόκληρου του φορέα
 - ⇒ με χρήση της μεθόδου των τομών γίνονται τομές των ράβδων που συνδέουν τα δύο απλά δικτυώματα και υπολογίζονται οι αντίστοιχες δυνάμεις
 - ⇒ τότε είναι δυνατή η χρήση της μεθόδου των κόμβων για την περαιτέρω επίλυση των δύο απλών δικτυωμάτων



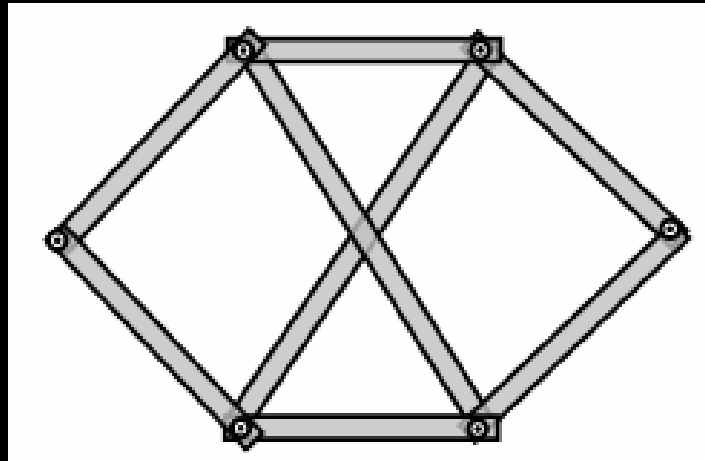
Σύνθετα δικτυώματα (συν.)

- Αυτά τα σύνθετα δικτυώματα αποτελούνται από απλά δικτυώματα τα οποία ουσιαστικά αντικαθιστούν τις κύριες ράβδους του δικτυώματος
 - ⇒ τα δικτυώματα αυτά μπορούν να επιλυθούν με συνδυασμό των μεθόδων των κόμβων και των τομών.
επιπλέον, μπορούν να επιλυθούν σαν απλά δικτυώματα θεωρώντας νοητά τα απλά δικτυώματα σαν απλές ράβδους και ακολούθως με δεδομένες τις δυνάμεις που ασκούνται στα άκρα των επιμέρους απλών δικτυωμάτων μπορούν να επιλυθούν τα τελευταία με τη μέθοδο των κόμβων.



Πολύπλοκα (ή ανώμαλα) δικτυώματα

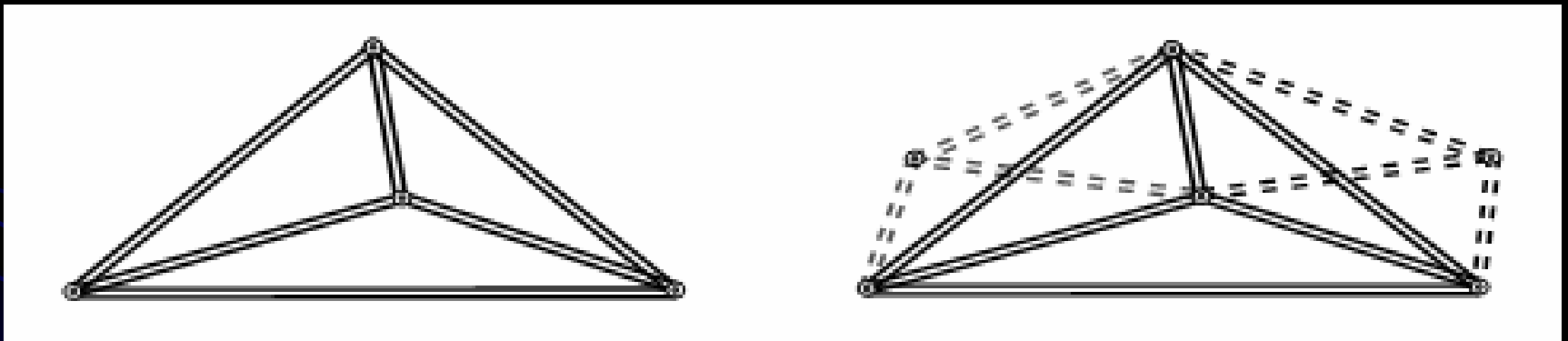
- Δικτυώματα τα οποία δεν είναι ούτε απλά αλλά ούτε σύνθετα



- Για την επίλυση ενός πολύπλοκου ισοστατικού δικτυώματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των κόμβων με την οποία για κάθε κόμβο έχουμε δύο εξισώσεις ισορροπίας.
 - ⇒ έτσι προκύπτει ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με διαστάσεις ίσες με δύο φορές τον αριθμό των κόμβων, το οποίο μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά με χρήση Η/Υ για να προσδιορίσουμε τις άγνωστες δυνάμεις των ράβδων.

Χωρικά δικτυώματα

- τρισδιάστατοι φορείς
- το απλούστερο σταθερό δικτύωμα που μπορεί να υπάρχει είναι το τετράεδρο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βασική μονάδα για το σχηματισμό χωρικών δικτυωμάτων, προσθέτοντας διαδοχικά για κάθε επιπλέον κόμβο τρεις ράβδους



- Ισοροπία κόμβων:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

Ισοστατικότητα χωρικών δικτυωμάτων

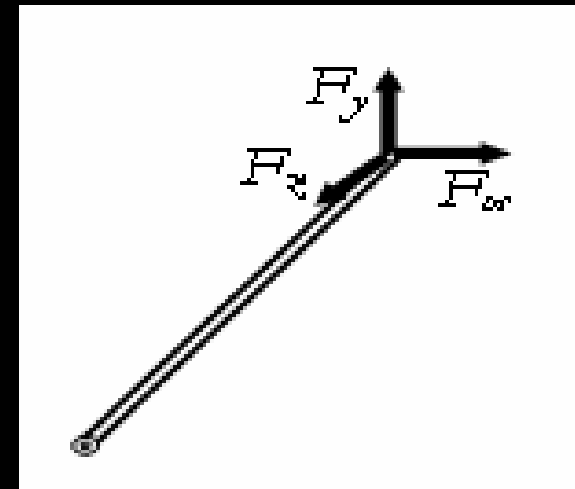
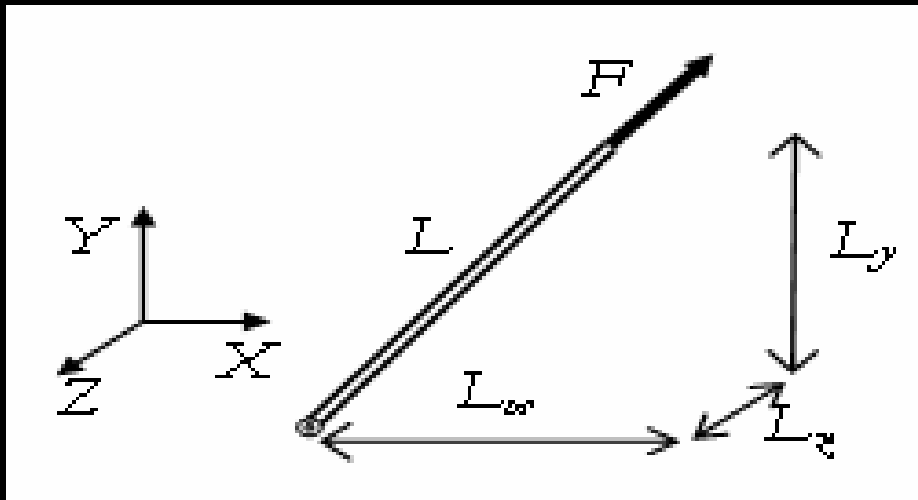
$P + A < 3 K \rightarrow$ μηχανισμός ή χαλαρό δικτύωμα

$P + A = 3 K \rightarrow$ ισοστατικός και ενδεχομένως σταθερό δικτύωμα

$P + A > 3 K \rightarrow$ υπερστατικό και ενδεχομένως σταθερό δικτύωμα
(βαθμός στατικής αοριστίας: $P + A - 3 K$)

$\left[\begin{array}{l} P: \text{ άθροισμα των ράβδων} \\ A: \text{ άθροισμα των αγνώστων αντιδράσεων} \\ K: \text{ αριθμός κόμβων} \end{array} \right]$

Χρήσιμες σχέσεις για χωρικά δικτυώματα



$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$F_x = F \times \frac{L_x}{L}$$

$$F_y = F \times \frac{L_y}{L}$$

$$F_z = F \times \frac{L_z}{L}$$

Μέθοδοι επίλυσης ισοστατικών χωρικών δικτυωμάτων

- Μέθοδος κόμβων

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

- Μέθοδος τομών

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

Ράβδοι μηδενικής δύναμης χωρικών δικτυωμάτων

Αφόρτιστες ράβδοι: μηδενικές αξονικές δυνάμεις υπό κάποιες φορτίσεις

- Αν όλες οι ράβδοι που καταλήγουν σε ένα κόμβο εκτός από μία ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και δεν υπάρχουν εξωτερικά ασκούμενα φορτία στον κόμβο, τότε η ράβδος η οποία είναι εκτός επιπέδου θα πρέπει να έχει μηδενική αξονική δύναμη.
 - Αν όλες οι ράβδοι που καταλήγουν σε ένα κόμβο εκτός από δύο έχουν βρεθεί να έχει είναι αφόρτιστες, δηλαδή να έχουν μηδενική αξονική δύναμη, τότε οι δύο εναπομείνουσες ράβδοι εάν δεν είναι συγγραμμικές πρέπει να είναι και αυτές αφόρτιστες.
- ⇒ Σημαντική απλοποίηση της ανάλυσης ενός δικτυώματος με τον προσδιορισμό τυχόν αφόρτιστων ράβδων