

ΠΠΜ 220: Στατική Ανάλυση των Κατασκευών Ι

Διάλεξη 7^η, 8^η και 9^η

Ανάλυση Ισοστατικών Δοκών και Πλαισίων

Τρίτη, 21, Τετάρτη, 22 και Παρασκευή 24
Σεπτεμβρίου, 2004

Πέτρος Κωμοδρόμος
komodromos@ucy.ac.cy
<http://www.ucy.ac.cy/~petrosk>

Ανακοινώσεις

▪ 2^ο Διαγώνισμα

- Το 2^ο διαγώνισμα θα γίνει την Τρίτη 28 Σεπτεμβρίου, 2004 στην αίθουσα διδασκαλίας (ΧΩΔ01 101), στην αρχή του μαθήματος (12:00 μ.μ.) και θα είναι σύντομης διάρκειας.
- Το διαγώνισμα θα είναι χωρίς σημειώσεις και βιβλία
- Η ύλη θα είναι οτιδήποτε θα διδαχθείτε μέχρι τότε, δηλαδή:
 - *όσα έχετε διδαχθεί κατά την διάρκεια των διαλέξεων*
 - *όσα περιέχονται στις σημειώσεις που σας έχουν δοθεί*
 - *όσα περιέχονται στην αντίστοιχη ύλη του βιβλίου σας:*
 - Πρόλογος
 - Εισαγωγή (στο Πρώτο Μέρος)
 - 1. Γενικές αρχές
 - 3. Δικτυώματα (εκτός 3.6.3)
 - 2. Απλή δοκός (εκτός 2.6)
 - 4. Αρθρωτή δοκός
 - 5. Πλαίσια

Θέματα

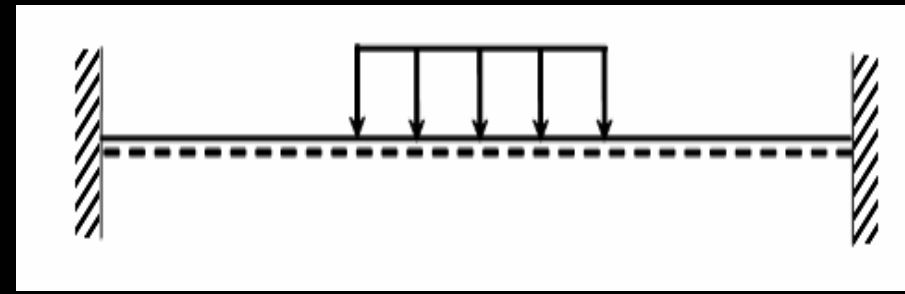
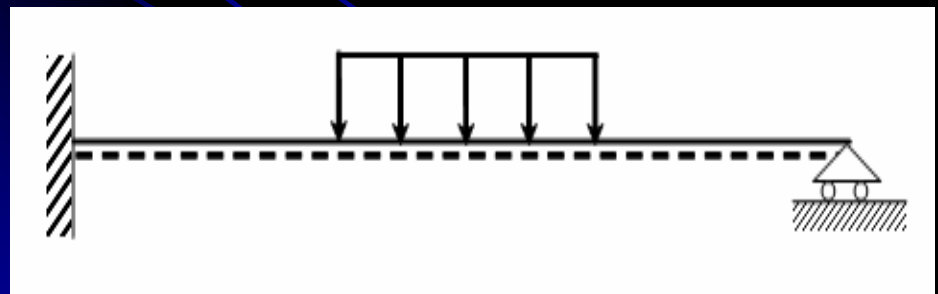
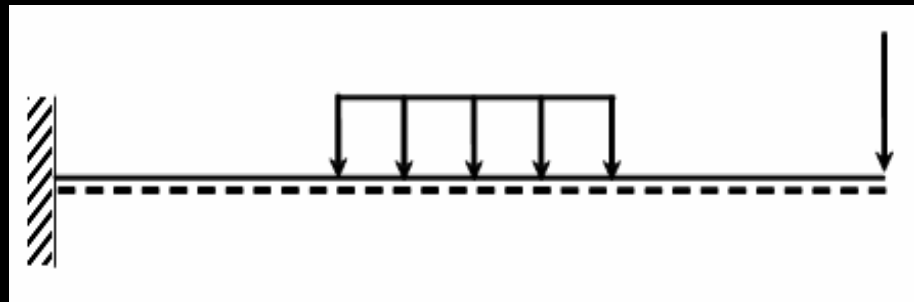
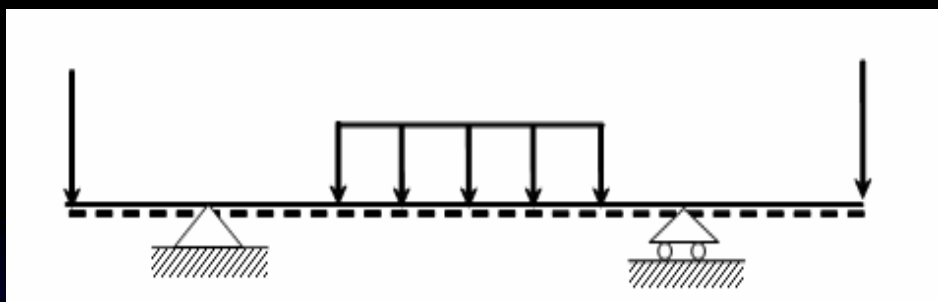
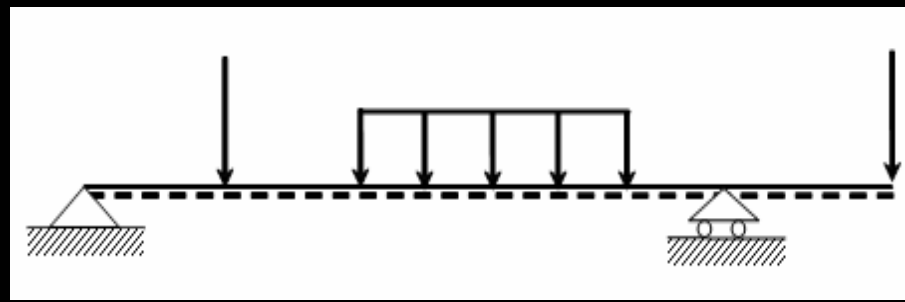
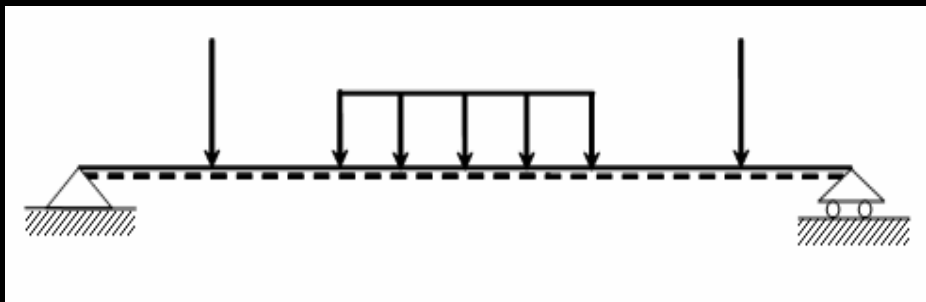
- Εισαγωγή στις δοκούς
- Συνήθεις τύποι δοκών
- Εντατικά μεγέθη
 - επίπεδων δοκών
 - χωρικών δοκών
- Διαφορικές εξισώσεις δοκών
- Διαγράμματα εντατικών μεγεθών δοκών
- Ορθές και διατμητικές τάσεις
- Αρχής της επαλληλίας
- Φαινόμενα P-Δ
- Πλαίσια και πλαισιωτές κατασκευές
- Στατικότητα δοκών και πλαισίων
- Παραμορφωμένες μορφές δοκών και πλαισίων

Εισαγωγή στις δοκούς

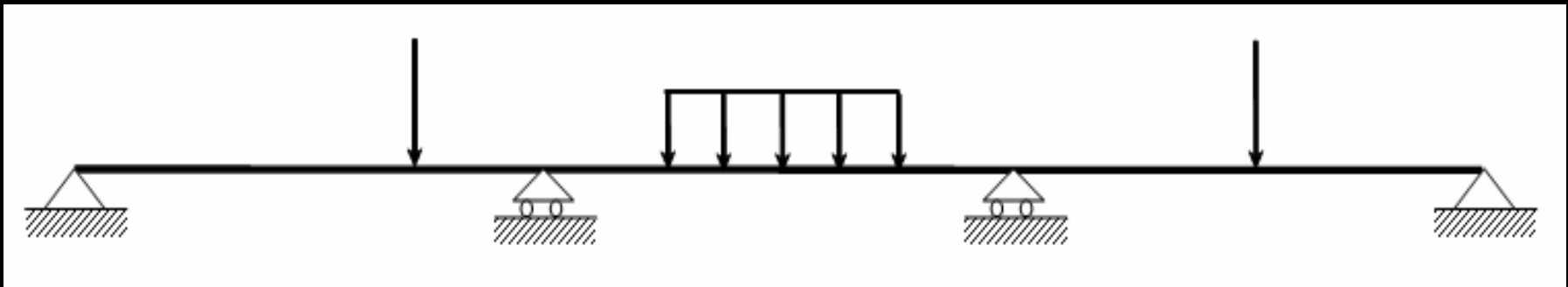
- το πιο κοινό δομικό στοιχείο
- σχετικά μικρές διαστάσεις στις δύο εγκάρσιες διευθύνσεις σε σχέση με την τρίτη και συνήθως οριζόντια διαμήκη διεύθυνση, τον άξονα τους
- καταπονούνται συνήθως με φορτία κάθετα στον διαμήκη άξονα τους
 - συμπεριφορά και διαστασιολόγηση εξαρτάται:
 - συνήθης δοκοί: από *καμπτικές ροπές και παραμορφώσεις*
 - κοντές και υψίκορμες δοκοί: από *τέμνουσες δυνάμεις*
- Διαφορετικά είδη φορτίων:
 - **συγκεντρωμένα**
 - δυνάμεις
 - ροπές
 - **κατανεμημένα**
 - ομοιόμορφα
 - τριγωνικά
 - παραβολικά, κλπ.

Συνήθης τύποι επίπεδων δοκών

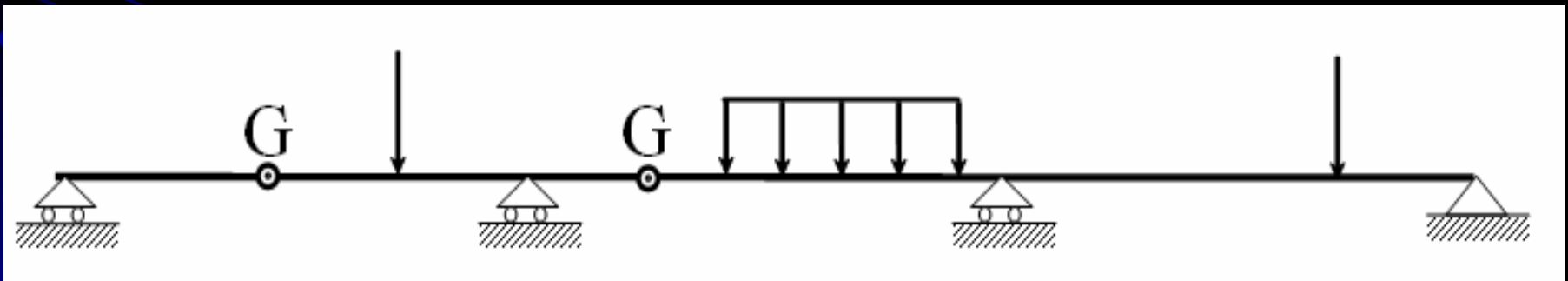
- Απλές δοκοί, ενός ανοίγματος, ανάλογα με τον τρόπο στήριξης



- Συνεχής δοκοί: με πολλαπλά ανοίγματα και ενδιάμεσες στηρίξεις



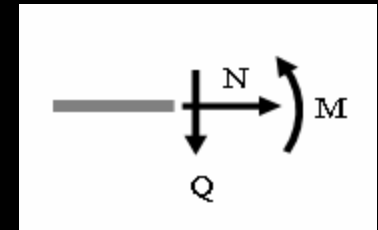
- Σύνθετες δοκοί ή δοκοί Gerber: με ενδιάμεσες ελευθερίες



Εντατικά μεγέθη δοκών (στο επίπεδο)

- καμπτικές ροπές, $M(x)$:

- γραμμικά μεταβαλλόμενες καθ' ύψος της διατομής ορθές τάσεις (θλιπτικές στο ένα πέλμα και εφελκυστικές στο άλλο)
- καθοριστικές στη διαστασιολόγηση συνήθων δοκών

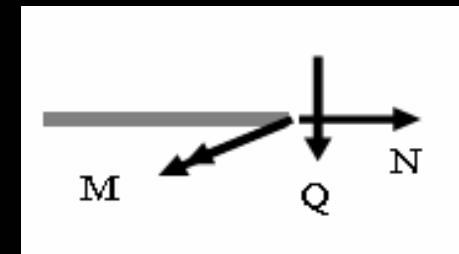


- τέμνουσες δυνάμεις, $V(x)$:

- παραβολικά μεταβαλλόμενες καθ' ύψος της διατομής διατμητικές τάσεις
- καθοριστικές μόνο σε περιπτώσεις κοντών και υψίκορμων δοκών

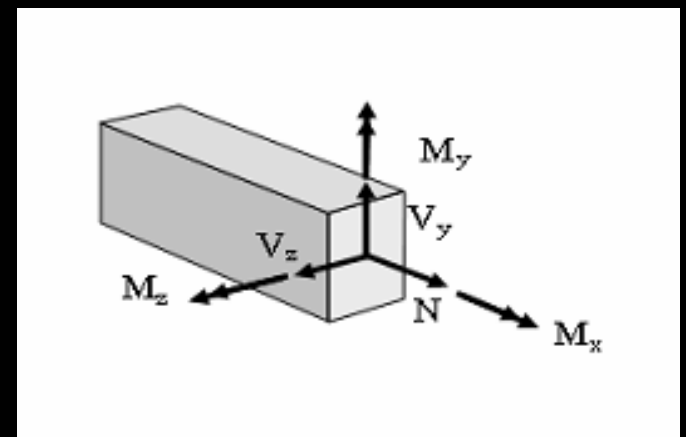
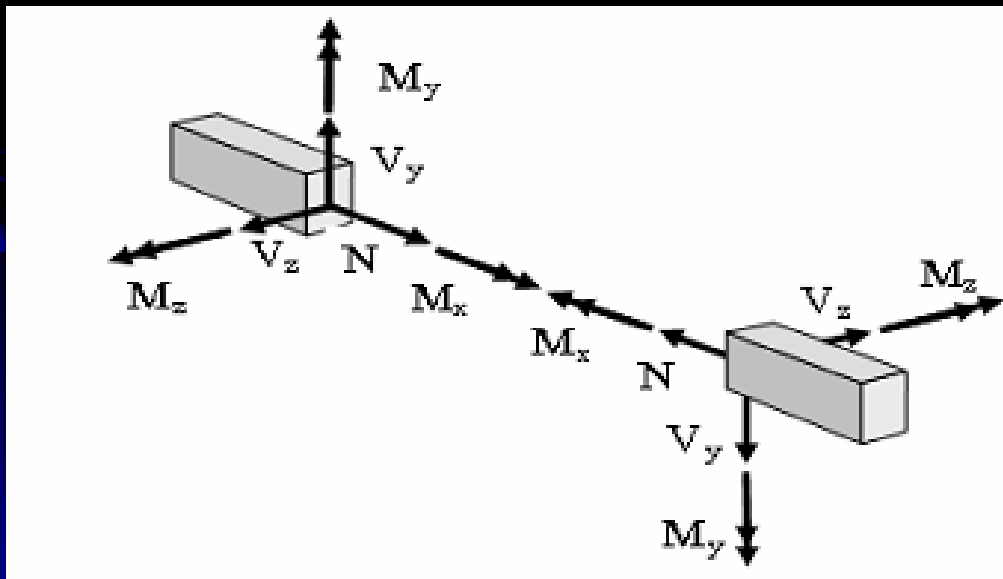
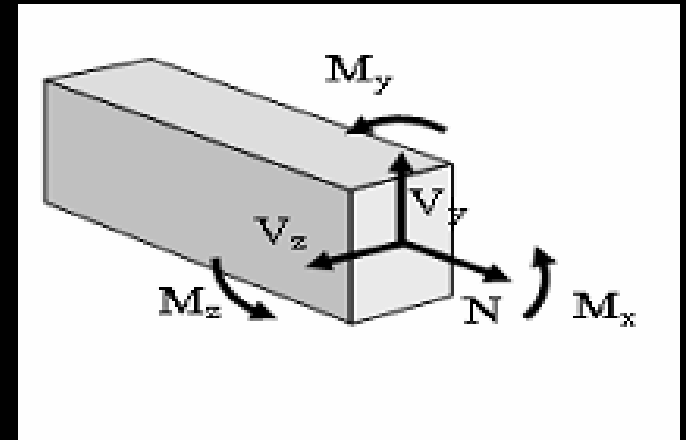
- αξονικές δυνάμεις, $N(x)$:

- μεταφέρονται από ομοιόμορφες ορθές τάσεις
- καθοριστικές σε περιπτώσεις μεγάλων αξονικών φορτίων
 - υποστυλώματα
 - κίνδυνος λυγισμού και φαινομένων P-Δ όταν έχουμε:
 - σημαντικά αξονικά φορτία
 - εύκαμπτα μέλη



Εντατικά μεγέθη δοκών (στο χώρο)

- αξονικές δυνάμεις, $N(x)$
- τέμνουσες δυνάμεις, $V_y(x)$ και $V_z(x)$
- καμπτικές ροπές, $M_y(x)$ και $M_z(x)$
- ροπές στρέψης, $M_x(x)$

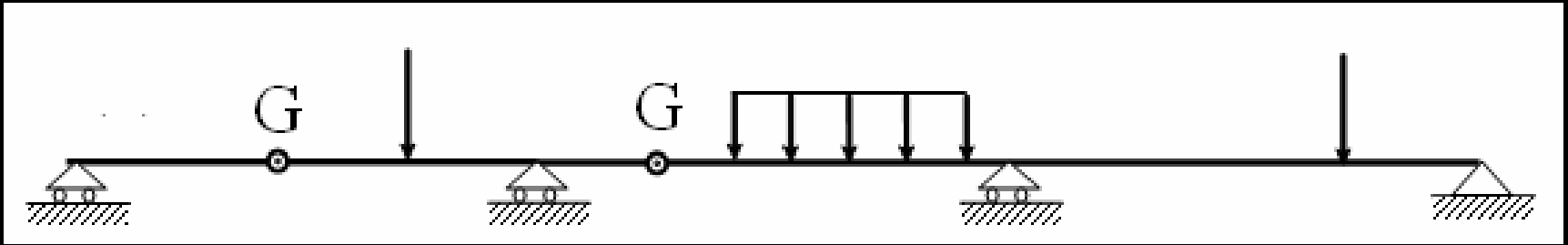


Επίλυση δοκών

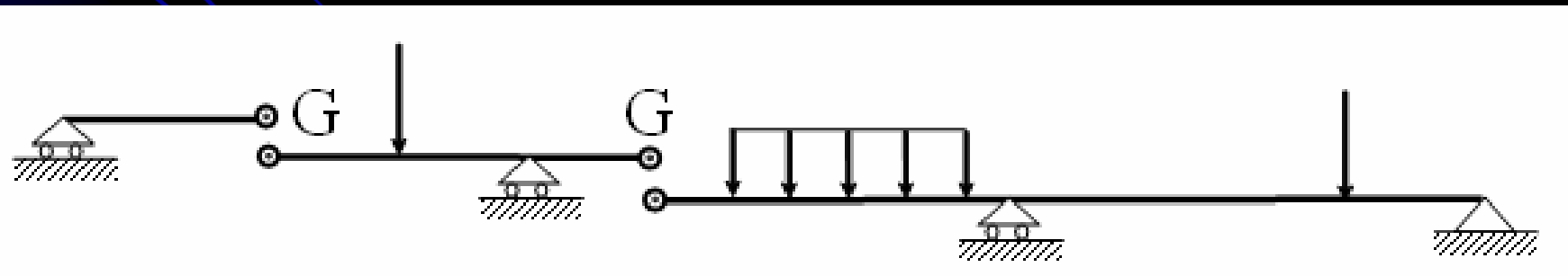
- Προσδιορισμός των *αντιδράσεων*
- Υπολογισμός των *εντατικών μεγεθών*
- Κατασκευή *διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών*
- Προσδιορισμός των *ακρότατων* τιμών των εντατικών μεγεθών
- Κατασκευή *περιβαλλουσών* διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών

(καμπύλες ή ευθείες που απεικονίζουν τις μέγιστες τιμές των εντατικών μεγεθών κατά μήκος του δομικού μέλους λαμβάνοντας υπόψη διάφορες περιπτώσεις και συνδυασμούς φορτίσεων)

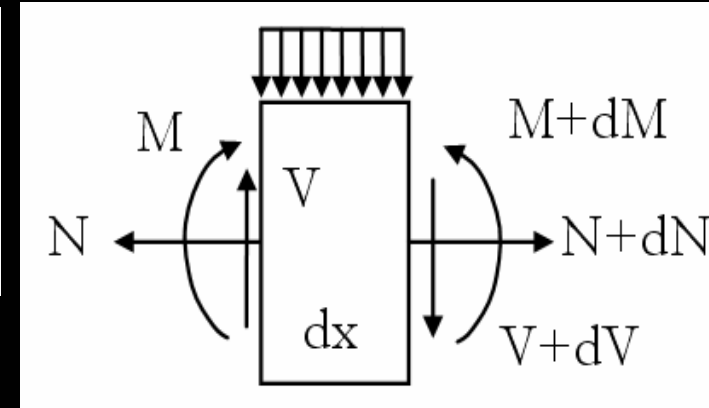
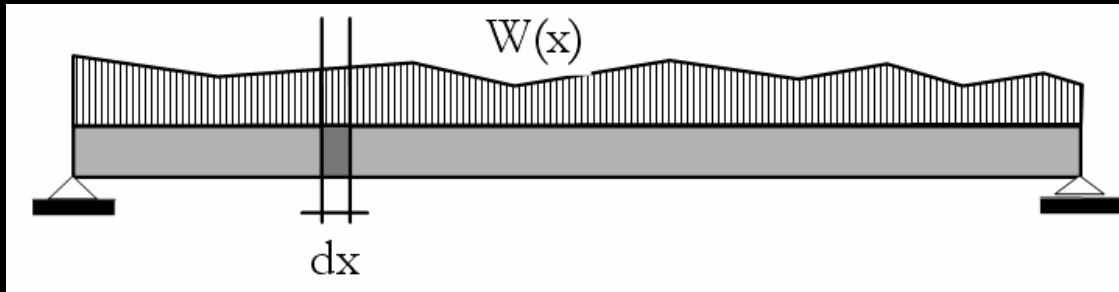
Επίλυση αρθρωτών δοκών



- ⇒ διαχωρισμός δοκού σε επιμέρους απλές δοκούς
 - *στηρίζουσες*: μπορούν να ισορροπήσουν από μόνες τους
 - *στηριζόμενες*: δεν μπορούν να ισορροπήσουν από μόνες τους
- ⇒ ξεκινώντας από τις στηριζόμενες δοκούς μπορούμε με τις εξισώσεις ισορροπίας να υπολογίσουμε τις αντιδράσεις στα άκρα τους
- ⇒ έχοντας υπολογίσει τα εντατικά μεγέθη στις αρθρώσεις προχωράμε στον υπολογισμό των αντιδράσεων και των στηριζουσών δοκών



Διαφορικές εξισώσεις δοκών



- ΔΕΣ απειροστού στοιχείου dx :
- Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{dV(x)}{dx} = -w_y(x)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{dN(x)}{dx} = -w_x(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -w(x)$$

Διαφορικές εξισώσεις και διαγράμματα εντατικών μεγεθών

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -w_y(x)$$

- η καμπτική ροπή έχει ακρότατα όπου η τέμνουσα δύναμη μηδενίζεται
- όπου υπάρχει συγκεντρωμένη δύναμη
 - ⇒ αντίστοιχο άλμα στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων ($\Delta T\Delta$)
 - ⇒ αλλαγή κλίσης στο διάγραμμα καμπτικών ροπών
- όπου υπάρχει συγκεντρωμένη ροπή
 - ⇒ αντίστοιχο άλμα στο διάγραμμα καμπτικών ροπών ($\Delta K\rho$)
- αν το φορτίο είναι πολυώνυμο βαθμού n
 - ⇒ η τέμνουσα δύναμη θα είναι πολυώνυμο βαθμού $n+1$
 - ⇒ η καμπτική ροπή θα είναι πολυώνυμο βαθμού $n+2$

Διαγράμματα εντατικών μεγεθών (ΔΤΔ)

- αριθμός τομών κάθετα στον άξονα της δοκού
- εφαρμογή εξισώσεων ισορροπίας στο ΔΕΣ του αποκομμένου τμήματος
 - ⇒ διατύπωση εκφράσεων για τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη
- αλλαγή του μεγέθους της τέμνουσας μεταξύ δύο σημείων A και B:

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = \int_{X_A}^{XB} dV = - \int_{X_A}^{XB} w(x) dx$$

- το ολοκλήρωμα ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας της καμπύλης του φορτίου μεταξύ των σημείων A και B
- η κλίση του ΔΤΔ ισούται με το αρνητικό μέγεθος του φορτίου
 - ⇒ αν το φορτίο είναι προς τα κάτω τότε η κλίση είναι αρνητική
- συγκεντρωμένη δύναμη
 - ⇒ άλμα στην τιμή της τέμνουσας δύναμης (ΔΤΔ)

Διαγράμματα εντατικών μεγεθών (ΔΚΡ)

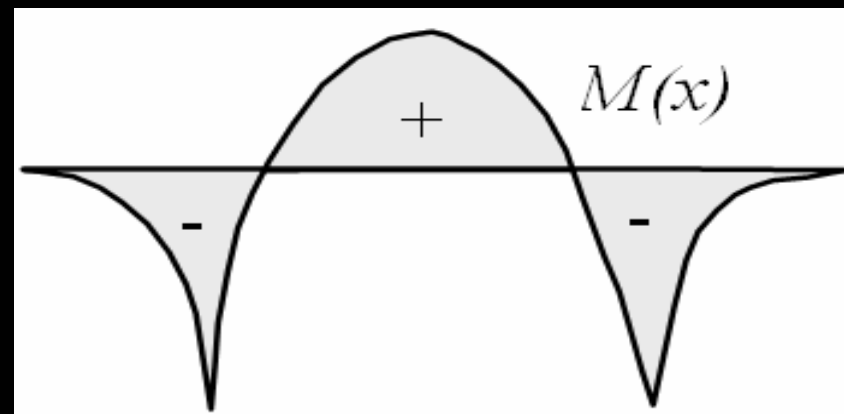
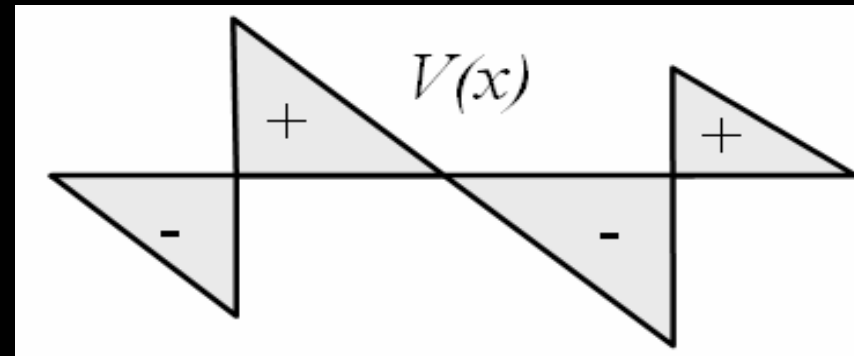
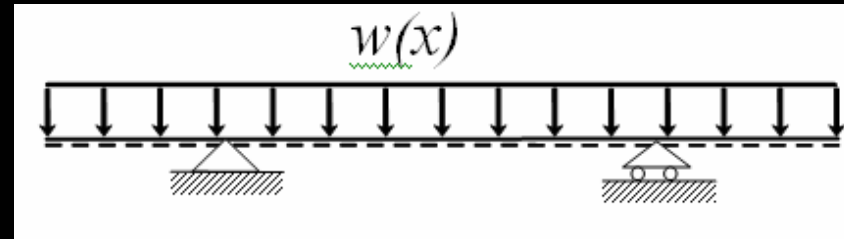
- αλλαγή του μεγέθους της ροπής μεταξύ δύο σημείων A και B

$$\Delta M_{AB} = M_B - M_A = \int_{X_A}^{XB} dM = \int_{X_A}^{XB} V(x) dx = - \int_{X_A}^{XB} w(x) dx$$

- το ολοκλήρωμα ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας της καμπύλης των τεμνουσών δυνάμεων (ΔΤΔ) μεταξύ των σημείων A και B
- η κλίση της καμπύλης των καμπτικών ροπών σε ένα σημείο ισούται με το μέγεθος της τέμνουσας στο συγκεκριμένο σημείο
- αν σε ένα σημείο η τέμνουσα δύναμη είναι θετική τότε και η κλίση της καμπύλης της καμπτικής ροπής σε εκείνο το σημείο είναι θετική
- τα ακρότατα των καμπτικών ροπών εμφανίζονται στα σημεία όπου οι αντίστοιχες τέμνουσες δυνάμεις ισούνται με μηδέν
- συγκεντρωμένη ροπή
⇒ άλμα στην τιμή της καμπτικής ροπής (ΔΚΡ)

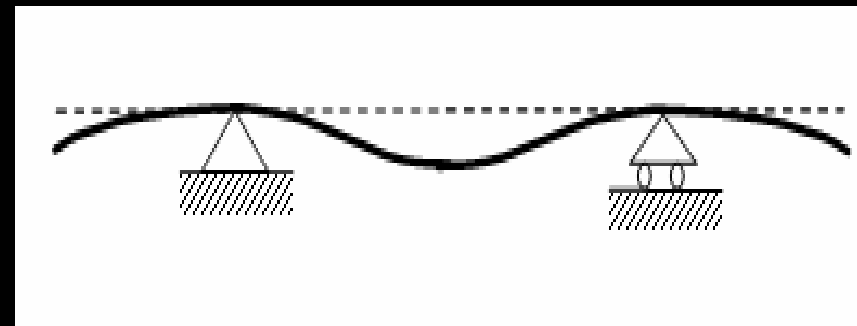
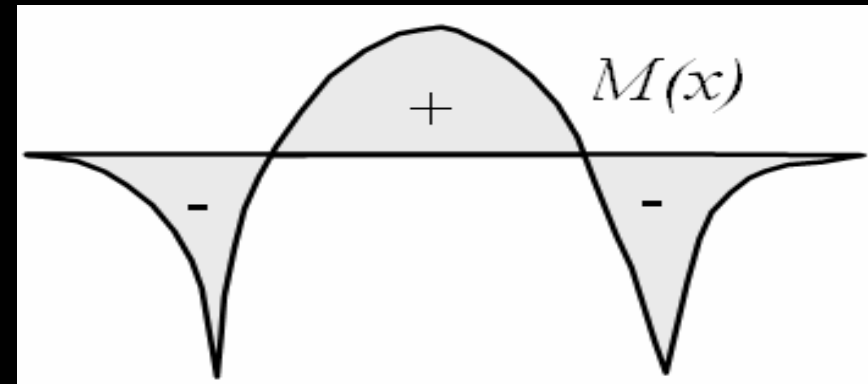
Κατασκευή διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών

- υπολογισμός των αντιδράσεων
- ξεκινώντας με τις τιμές της τέμνουσας δύναμης και της καμπτικής ροπής στο αριστερό άκρο προχωρούμε προς τα δεξιά
- εξετάζουμε όλα τα σημεία με σχετικές αλλαγές (π.χ. όπου υπάρχουν συγκεντρωμένες δυνάμεις ή ροπές, ή όπου αρχίζουν και τελειώνουν κατανεμημένα φορτία, κλπ.) προσθέτοντας τα αντίστοιχα εμβαδά κάτω από τις καμπύλες των φορτίων και τεμνουσών δυνάμεων, αντίστοιχα, σαν αλλαγές των τιμών των αντίστοιχων διαγραμμάτων



Καμπυλότητα της παραμορφωμένης δοκού

- κατασκευή διαγράμματος καμπτικών ροπών (ΔΚΡ)
- θετική καμπτική ροπή
⇒ η καμπυλότητα στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (εφελκύει την κάτω ίνα της δοκού)
- αρνητική καμπτική ροπή
⇒ η καμπυλότητα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (εφελκύει την άνω ίνα της δοκού)
- μηδενική καμπτική ροπή
⇒ σημείο καμπής στην καμπυλότητα, δηλαδή αλλάζει η πλευρά στην οποία βλέπουν τα κοίλα από πάνω κάτω ή αντίστροφα.

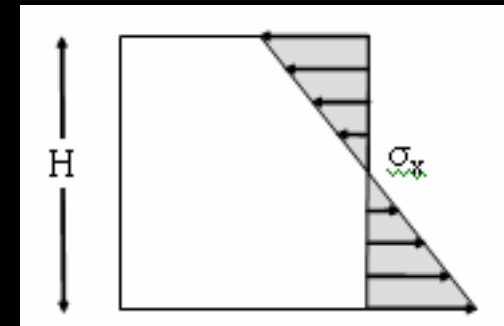
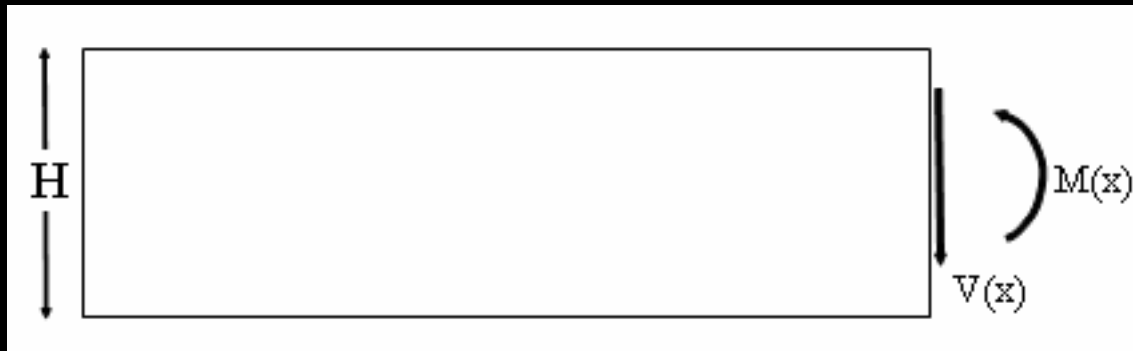


Ορθές και διατμητικές τάσεις

- ορθές τάσεις

$$\sigma_{max} = \frac{M_z \cdot y_c}{I_z}$$

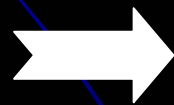
$$I_z = \int_A y^2 dA$$



- ορθογωνική διατομή $b \times h$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$y_c = \frac{h}{2}$$



$$\sigma_x = \frac{M_z}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \frac{M_z}{W_z}$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_c}$$

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

- διατμητικές τάσεις

$$\tau_{max} = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z \cdot t}$$

$$Q_z = \int_A y \, dA$$



- ορθογωνική διατομή $b \times h$

$$t = b$$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

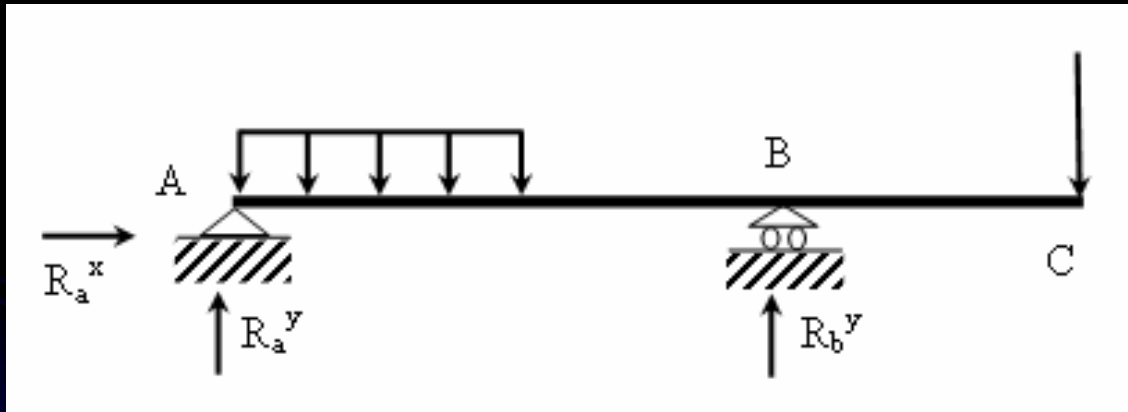


$$\tau_{max}^{ορθ} = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z \cdot t} = \frac{V_y \cdot \frac{b \cdot h^2}{8}}{\frac{b \cdot h^3}{12} \cdot b} = \frac{3 \cdot V_y}{2 \cdot b \cdot h} = 1.5 \cdot \frac{V_y}{A}$$

$$Q_z = \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{b \cdot h^2}{8}$$

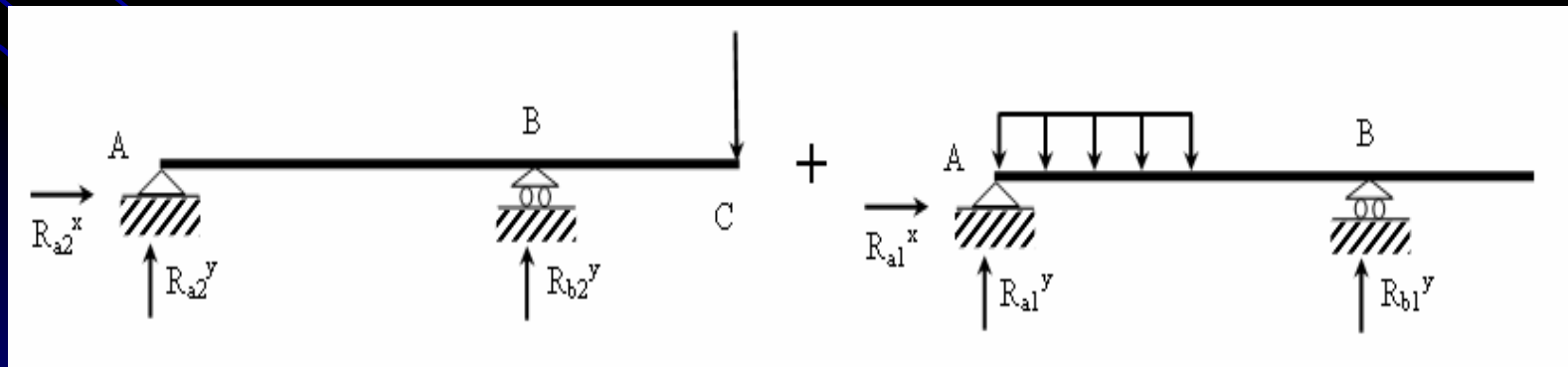
Αρχή της Επαλληλίας

"οι αντιδράσεις και η συνολική εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση μιας κατασκευής λόγω κάποιων φορτίσεων, ή δράσεων γενικότερα, ισούται με το άθροισμα των επιμέρους αντιδράσεων, εντατικών και παραμορφωσιακών καταστάσεων, οι οποίες προκύπτουν αναλύοντας τον φορέα για κάθε μια από αυτές τις φορτίσεις ή δράσεις ξεχωριστά"

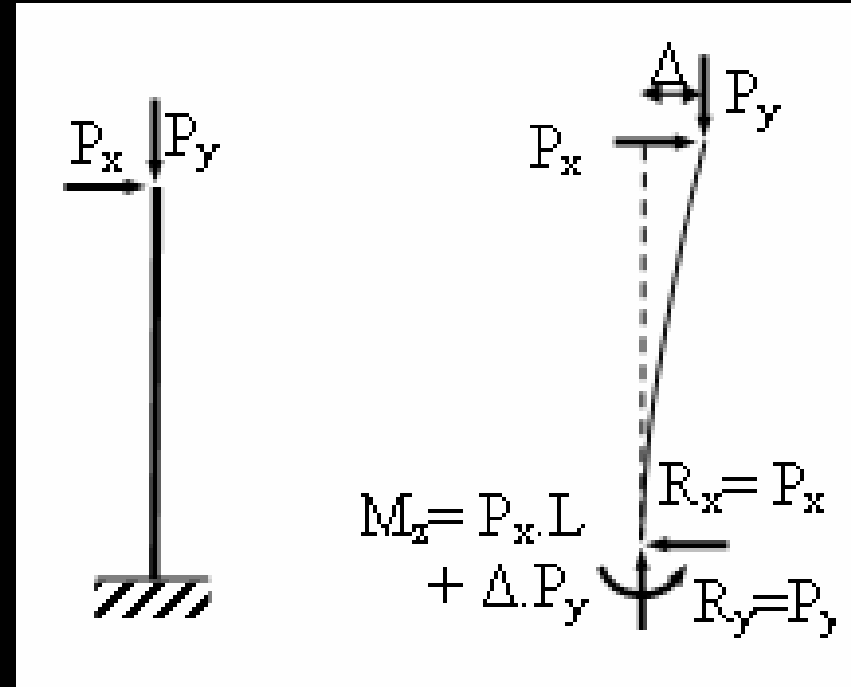
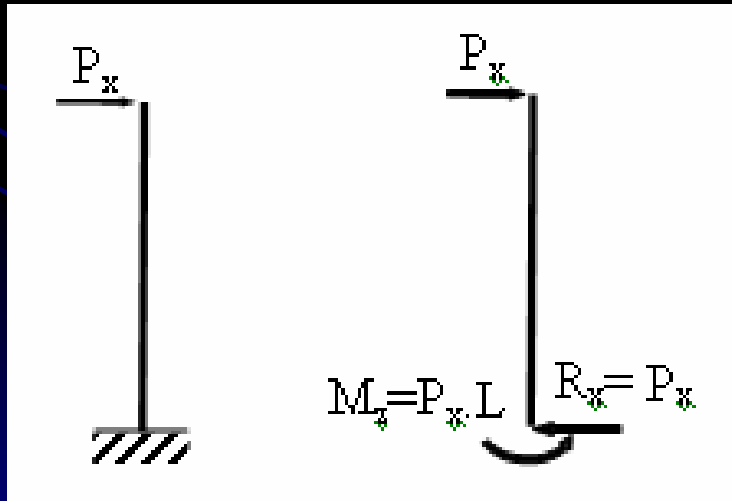
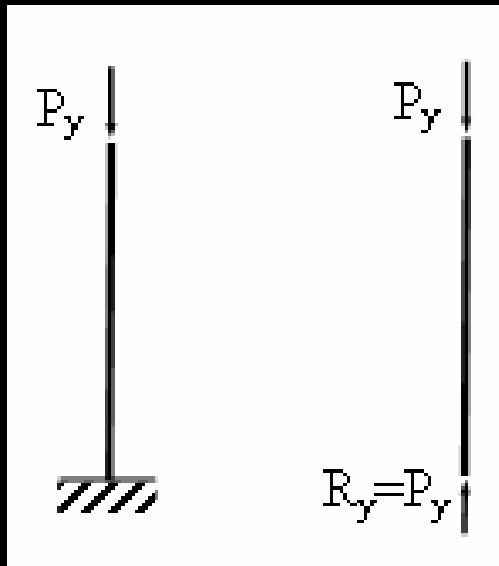
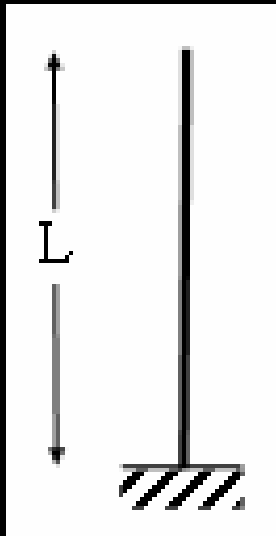


$$R_a^x = R_{a1}^x + R_{a2}^x$$
$$R_a^y = R_{a1}^y + R_{a2}^y$$
$$R_b^y = R_{b1}^y + R_{b2}^y$$

=

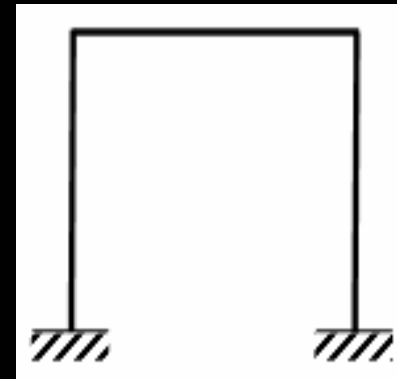
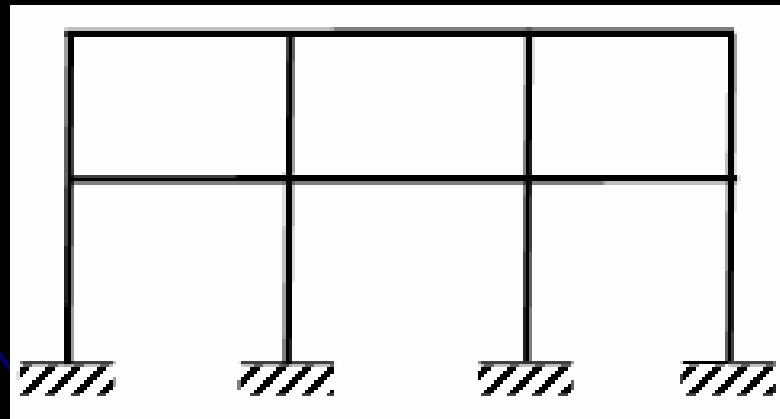
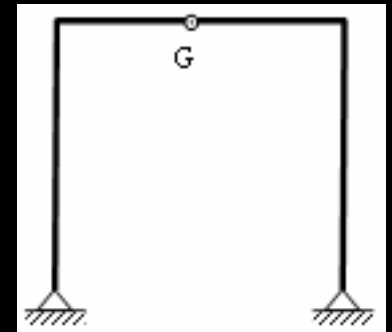
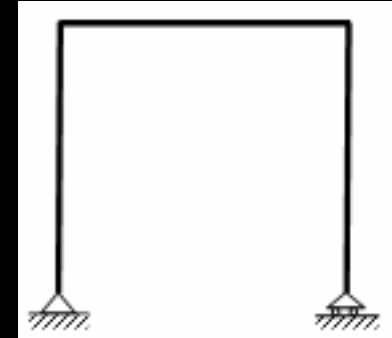


Φαινόμενα P-Δ



Πλαίσια και πλαισιωτές κατασκευές

- αποτελούνται από δοκούς και υποστυλώματα τα οποία συνδέονται στερεά σε κόμβους υπό γωνία, συνήθως 90°
- οι συνδέσεις επιτρέπουν μεταβίβαση εντατικών μεγεθών
- αμετάβλητες οι γωνίες σύνδεσης στους κόμβους
- έλεγχος ορθότητας αποτελεσμάτων: για να ισορροπεί ένα πλαίσιο πρέπει να ισορροπούν και όλοι οι κόμβοι του
- ΔΚΡ σχεδιάζονται συνήθως από την εφελκύομενη μεριά
 - τοιχία
 - διαγώνιοι



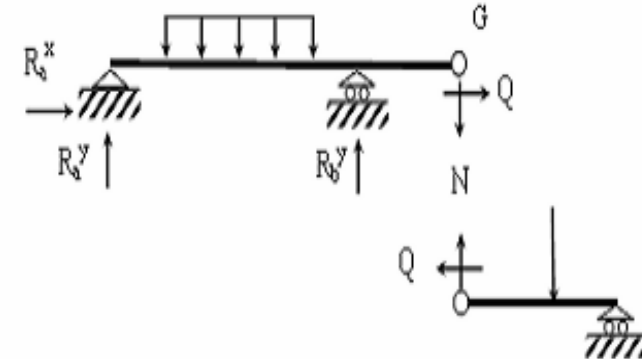
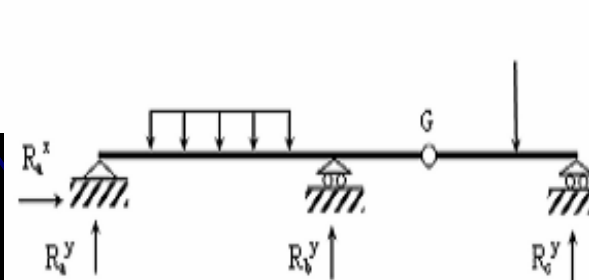
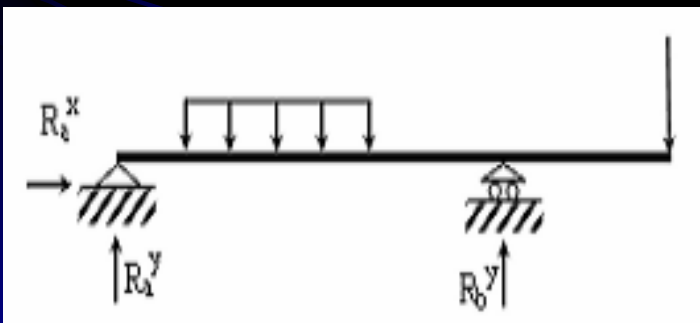
Στατικότητα απλών δοκών

$A < E + N \rightarrow$ μηχανισμός ή χαλαρός φορέας

$A = E + N \rightarrow$ ισοστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας

$A > E + N \rightarrow$ υπερστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας
(βαθμός στατικής αοριστίας: $R - G - N$)

$\left[\begin{array}{ll} N: \text{ Επίπεδοι φορείς: } N = 3 & \text{Χωρικοί φορείς: } N = 6 \\ A: \text{ αντιδράσεις} & E: \text{ αριθμός εσωτερικών ελευθεριών} \end{array} \right]$



Στατικότητα πλαισίων (φορέων με βρόγχους)

Τομές \rightarrow για να απλοποιηθεί ο φορέας

$\alpha < n N \rightarrow$ μηχανισμός ή χαλαρός φορέας

$\alpha = n N \rightarrow$ ισοστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας

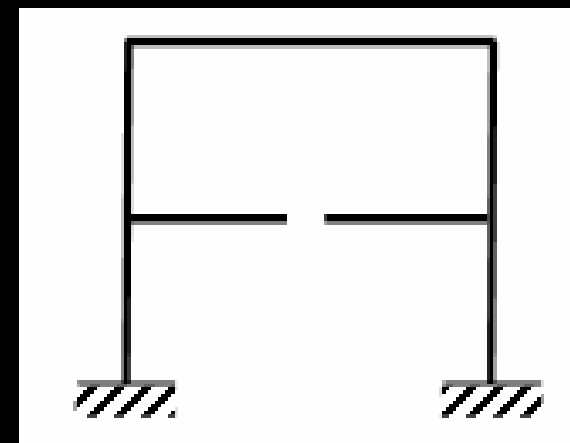
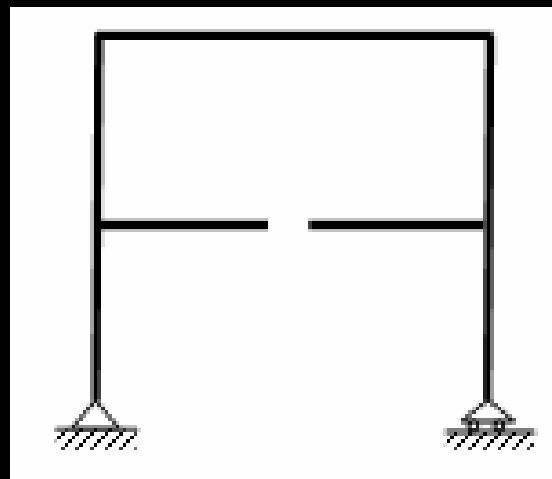
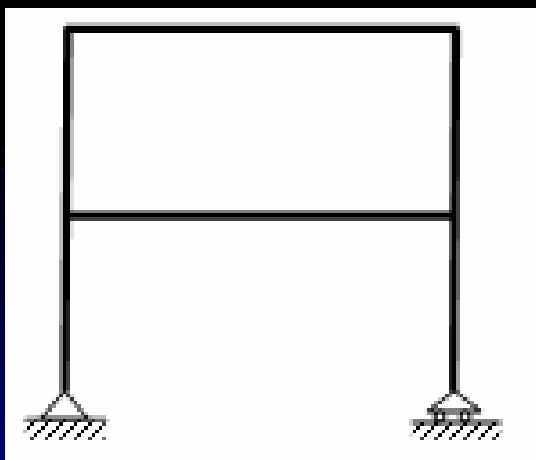
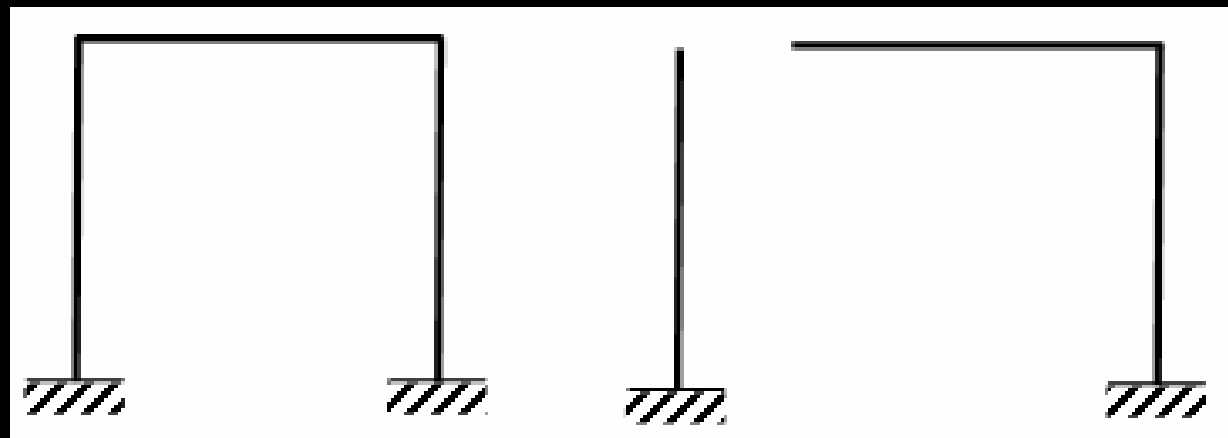
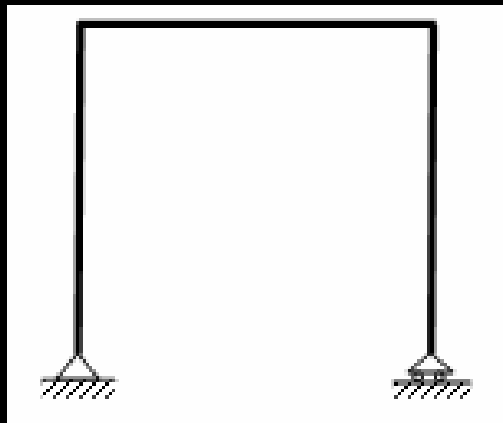
$\alpha > n N \rightarrow$ υπερστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας
(βαθμός στατικής αοριστίας: $\alpha - n N$)

N : Επίπεδοι φορείς: $N = 3$ Χωρικοί φορείς: $N = 6$

α : αντιδράσεις συμπεριλαμβανομένων εντατικών μεγεθών σε τομές

n : αριθμός επιμέρους τμημάτων φορέα

Στατικότητα πλαισίων



Παραμορφωμένες μορφές δοκών και πλαισίων

- μετακινήσεις δοκών και πλαισίων:
 - κυρίως λόγω καμπτικών παραμορφώσεων
- σχεδιασμός παραμορφωμένης μορφής:
 - κατασκευή διαγράμματος καμπτικών ροπών (ΔKP)
 - καμπυλότητα συμβατή με ΔKP
 - συμβατότητα με δεσμεύσεις στις στηρίξεις
 - συμβατότητα με συνδέσεις μελών
 - αμετάβλητες σταθερές συνδέσεις κόμβων
 - ευκρινής καθορισμός
 - της φοράς μετατοπίσεων και στροφών
 - της καμπυλότητας (κοίλα)
 - των σημείων καμπής
 - ισορροπία κόμβων

