

# ΠΠΜ 220: Στατική Ανάλυση των Κατασκευών Ι

*Διαλέξεις 13-15*

## Εισαγωγή στις Παραμορφώσεις και Μετακινήσεις

Τρίτη, 5, και Τετάρτη, 6 και  
Παρασκευή 8 Οκτωβρίου, 2004

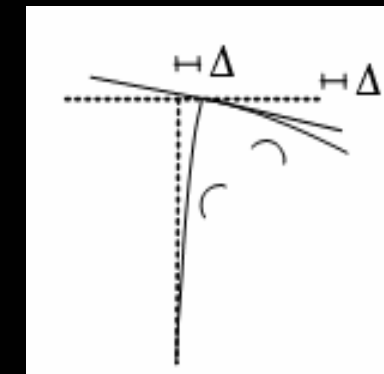
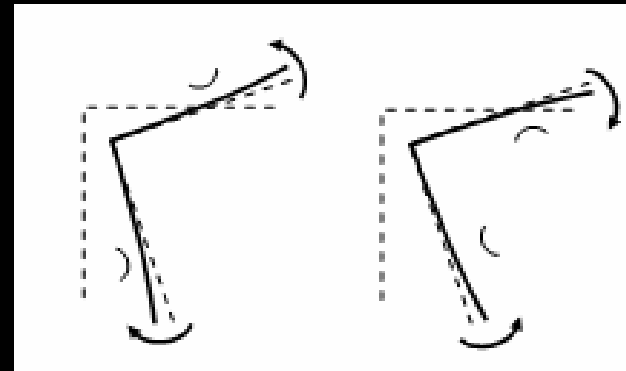
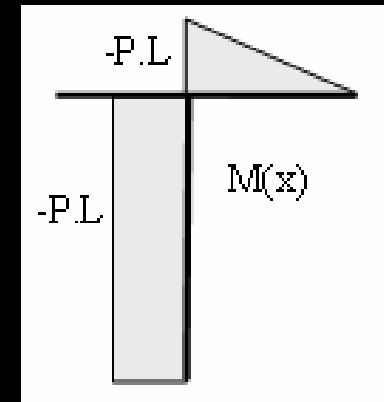
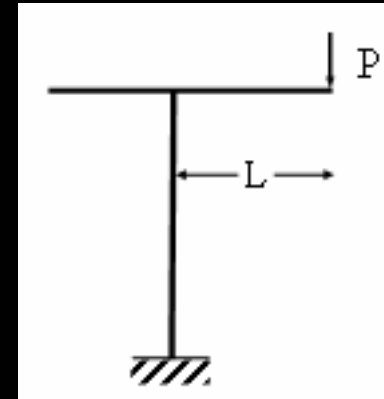
*Πέτρος Κωμοδρόμος*  
*[komodromos@ucy.ac.cy](mailto:komodromos@ucy.ac.cy)*  
*<http://www.ucy.ac.cy/~petrosk>*

# Θέματα

- Παραμορφωμένες μορφές δοκών και πλαισίων
- Χρησιμότητα υπολογισμού παραμορφώσεων και μετακινήσεων
- Συνήθης παραδοχές
- Εισαγωγή στις παραμορφώσεις και μετακινήσεις
  - Αξονικές παραμορφώσεις
  - Καμπτικές παραμορφώσεις
- Μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων
  - Γεωμετρικές μέθοδοι
    - Μέθοδος διπλής ολοκλήρωσης
    - Μέθοδος ροπών
    - Μέθοδος ομόλογης δοκού
  - Ενεργειακές μέθοδοι

# Παραμορφωμένες μορφές δοκών και πλαισίων

- μετακινήσεις δοκών και πλαισίων:
  - κυρίως λόγω καμπτικών παραμορφώσεων
- σχεδιασμός παραμορφωμένης μορφής:
  - κατασκευή διαγράμματος καμπτικών ροπών ( $\Delta KP$ )
  - καμπυλότητα συμβατή με  $\Delta KP$
  - συμβατότητα με δεσμεύσεις στις στηρίξεις
  - συμβατότητα με συνδέσεις μελών
  - αμετάβλητες σταθερές συνδέσεις κόμβων
  - ευκρινής καθορισμός
    - της φοράς μετατοπίσεων και στροφών
    - της καμπυλότητας (κοίλα)
    - των σημείων καμπής
  - ισορροπία κόμβων



# Χρησιμότητα υπολογισμού παραμορφώσεων και μετακινήσεων

- Έλεγχοι

- ασφάλειας

- εντατικών μεγεθών σε σχέση με τις επιτρεπόμενες αντοχές

- λειτουργικότητας

- διασφαλίζονται λειτουργικές ανάγκες μιας κατασκευής (π.χ. έλεγχος παραμορφώσεων και μετακινήσεων)

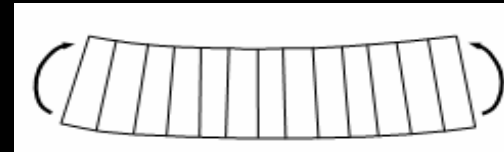
⇒ αναγκαίος ο υπολογισμός των παραμορφώσεων και μετακινήσεων ενός φορέα κάτω από την επίδραση κάποιων συγκεκριμένων δράσεων ή συνδυασμών δράσεων για σκοπούς *ελέγχου λειτουργικότητας*

- Επίσης, απαραίτητος είναι ο υπολογισμός των μετακινήσεων κατά την επίλυση υπερστατικών φορέων για την οποία δεν αρκούν οι εξισώσεις ισορροπίας

⇒ Οι επιπλέον εξισώσεις προκύπτουν από την διατύπωση της συμβιβαστότητας των παραμορφώσεων και μετακινήσεων του φορέα

# Συνήθης παραδοχές

- Μικρές παραμορφώσεις και μετακινήσεις σε σχέση με τις διαστάσεις  
⇒ χρήση αρχικής απαραμόρφωτης γεωμετρία και μορφής του φορέα
- Γραμμική-ελαστική συμπεριφορά του υλικού  $\tau = E \cdot \varepsilon$ 
  - γραμμική συμπεριφορά: οι τάσεις είναι ανάλογες των παραμορφώσεων
  - ελαστική συμπεριφορά: αν αφαιρεθούν όλα τα φορτία από τον φορέα τότε αυτός θα επιστρέψει στην αρχική αφόρτιστη θέση και γεωμετρία του χωρίς παραμένουσες παραμορφώσεις



- Αρχή της επαλληλίας.
  - Αρχή της επιπεδότητας των διατομών (Bernoulli)
    - Για γραμμικά μέλη υπό καμπτικές παραμορφώσεις θεωρείται ότι επίπεδες διατομές που είναι κάθετες στον άξονα ενός μέλους παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα ενός μέλους μετά την παραμόρφωση
- ⇒ έτσι, έχοντας γραμμικά ελαστικό υλικό υπάρχει μια γραμμική μεταβολή των ορθών τάσεων μεταξύ των ακραίων ινών στα πέλματα ενός μέλους

# Εισαγωγή στις παραμορφώσεις και μετακινήσεις

- Ράβδοι δικτυωμάτων:
  - μόνο αξονικές δυνάμεις και παραμορφώσεις
- ⇒ υπολογισμός μετακινήσεων λαμβάνοντας υπόψη μόνο αξονικές παραμορφώσεις
  
- Δοκοί
  - η συνεισφορά των αξονικών και διατμητικών παραμορφώσεων στις μετακινήσεις μίας δοκού ή ενός πλαισίου είναι συνήθως αμελητέα συγκρινόμενη με τις καμπτικές παραμορφώσεις.
- ⇒ στις συνήθεις περιπτώσεις δοκών και πλαισίων μπορούμε να λάβουμε υπόψη μόνο τις καμπτικές παραμορφώσεις κατά τον υπολογισμό των μετακινήσεων αλλά και στην διατύπωση των εξισώσεων συμβιβαστότητας των μετακινήσεων, αγνοώντας τις αξονικές και διατμητικές παραμορφώσεις

# Αξονικές παραμορφώσεις

- τα μέλη των δικτυωμάτων καταπονούνται μόνο από αξονικές δυνάμεις  $N$ , οι οποίες αντιστοιχούν σε ομοιόμορφες ορθές τάσεις:

⇒ ομοιόμορφες ορθές τάσεις

$$\sigma_x = \tau_{xx} = \frac{N}{A}$$

- Νόμος του Hooke

$$\tau_{xx} = \sigma_x = E \varepsilon_{xx}$$

⇒ (συσχετίζει ορθές τάσεις και παραμορφώσεις)

( $E$ : μέτρο ελαστικότητας/*modulus of elasticity*)

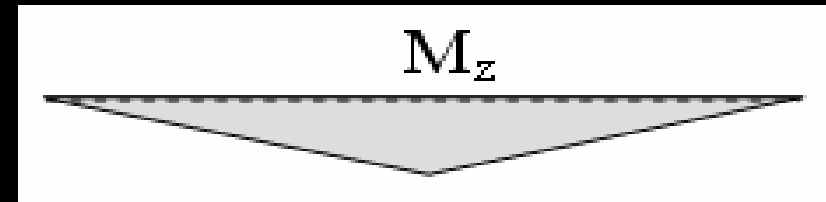
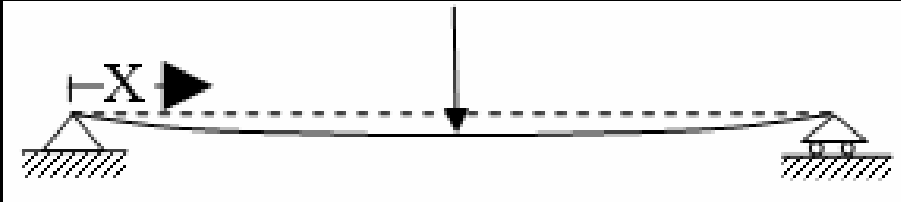
- επιμήκυνση  $\Delta L$  μίας ράβδου

- μήκους,  $L$
- διατομής,  $A$

$$\Delta L = \varepsilon_{xx} \cdot L = \frac{\sigma_{xx}}{E} \cdot L = \frac{N \cdot L}{A \cdot E}$$

# Καμπτικές παραμορφώσεις

- ο άξονας της δοκού παραμορφώνεται με τέτοιο τρόπο που τοπικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελείται από τμήματα κυκλικών τόξων με συγκεκριμένη ακτίνα καμπυλότητας.

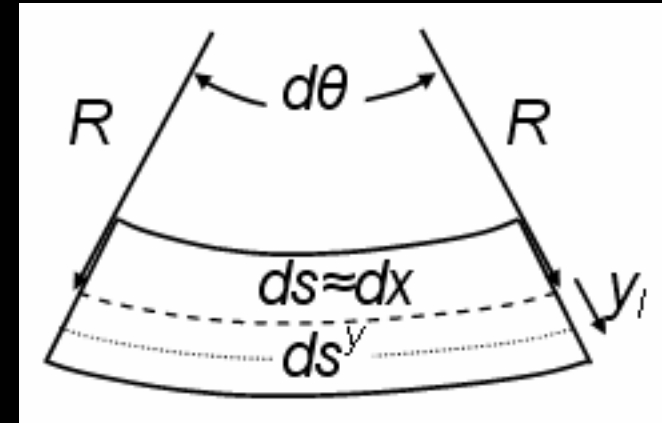


- Χρήση ΔΚΡ για τον προσδιορισμό της καμπυλότητας
    - π.χ. στο πιο πάνω παράδειγμα, η θετική ροπή προκαλεί καμπτικές παραμορφώσεις με εφελκυσμό στις κάτω ίνες και θλίψη στις πάνω ίνες
  - οι παραμορφώσεις κάθετα στον άξονα της δοκού παριστάνονται ιδιαίτερα επευξημένες ώστε να είναι πιο ευδιάκριτες
- ⇒ είναι απαραίτητο να μπορούν να υπολογιστούν οι *βυθίσεις* και *κλίσεις* κατά μήκος του *ουδέτερου άξονα*, δηλαδή να προσδιοριστεί η ελαστική καμπύλη, ή *ελαστική γραμμή*, μιας παραμορφωμένης δοκού.



# Καμπτικές παραμορφώσεις (συν.)

- απειροστό τμήμα της δοκού μήκους  $dx$ 
  - μόνο η ίνα στον ουδέτερο άξονα δεν παραμορφώνεται
  - οι ίνες κάτω και πάνω από την ίνα αυτή θλίβονται και εφελκύνονται αντίστοιχα με την καμπτική ροπή



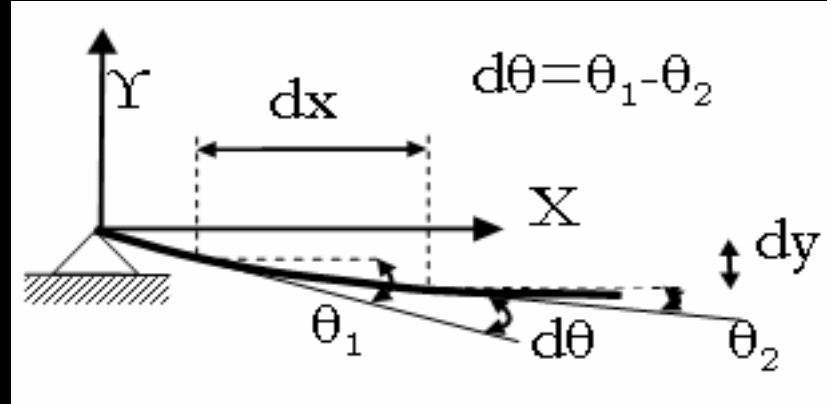
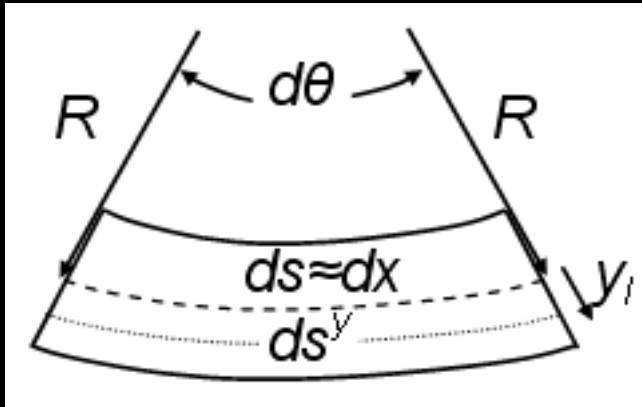
- ουδέτερο επίπεδο - ουδέτερος άξονας της δοκού

$$ds = dx = R \cdot d\theta$$

- *Αρχή του Bernoulli:*

κατά την καμπτική παραμόρφωση μίας δοκού, επίπεδα τα οποία είναι κάθετα στον άξονα της δοκού πριν από την παραμόρφωση της δοκού, θεωρούνται ότι παραμένουν μετά την παραμόρφωση επίπεδα και κάθετα στον παραμορφωμένο ουδέτερο άξονα της δοκού

# Καμπτικές παραμορφώσεις (συν.)



- καμπυλότητα: η αλλαγή της κλίσης της ελαστικής καμπύλης της δοκού λόγω των καμπτικών παραμορφώσεων

$$d\theta = \theta_1 - \theta_2$$

$$ds = dx = R \cdot d\theta$$



$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx}$$

- μήκος του τόξου παραμορφωμένης ίνας σε απόσταση  $y_l$  από τον ουδέτερο άξονα:

$$ds^{y_l} = (R + y_l) \cdot d\theta$$

- παραμόρφωση σε απόσταση  $y_l$ :

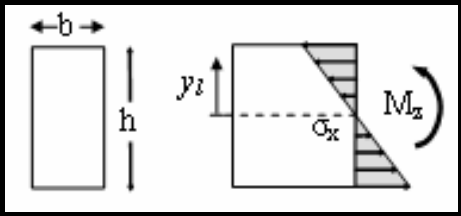
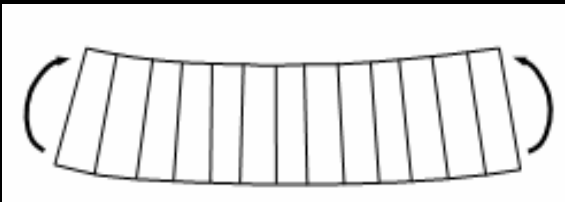
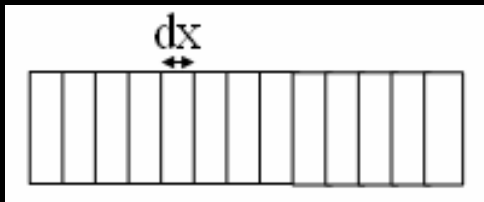
$$\epsilon_x^{y_l} = \frac{(R + y_l) \cdot d\theta - R \cdot d\theta}{R \cdot d\theta} = \frac{y_l}{R}$$



καμπυλότητα:

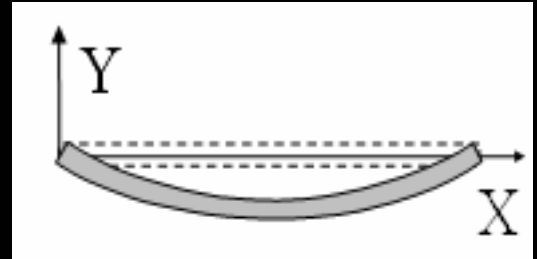
$$K_R = \frac{1}{R} = \frac{\epsilon_x^{y_l}}{y_l}$$

# Καμπτικές παραμορφώσεις (συν.)



- αν το υλικό έχει γραμμική-ελαστική συμπεριφορά
- καμπτική ροπή μιας παραμορφωμένης δοκού βάσει του ολοκληρώματος των ορθών τάσεων επί την απόσταση από τον ουδέτερο άξονα στην επιφάνεια της διατομής:

$$\sigma_x = \tau_{xx} = E \cdot \varepsilon_x$$



$$M_z = \iint_A \sigma_x \cdot y_l \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot y_l \cdot b \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} E \cdot \varepsilon_x \cdot y_l \cdot b \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} E \cdot \frac{y_l}{R} \cdot y_l \cdot b \, dy = \frac{E}{R} \int_{-h/2}^{h/2} y_l^2 \cdot b \, dy$$

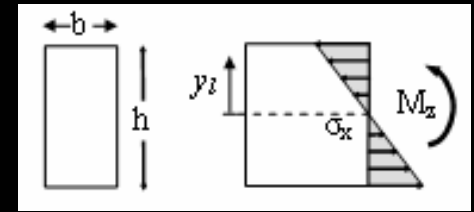
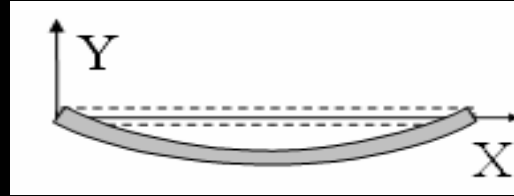
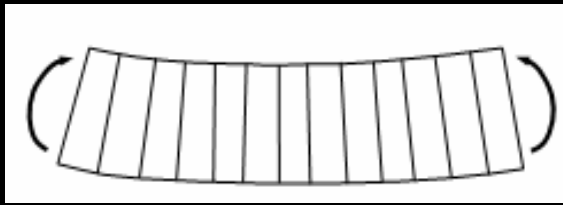
- ροπή αδράνειας:

$$I_z = \int_{-h/2}^{h/2} y_l^2 \cdot b \, dy$$



$$M_z = \frac{E \cdot I_z}{R}$$

# Καμπτικές παραμορφώσεις (συν.)



$$M_z = \frac{E \cdot I_z}{R}$$



$$K_R = \frac{1}{R} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}$$



$$M_z = E \cdot I_z \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

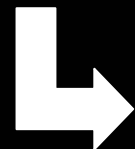
$$K_R = \frac{1}{R} = \frac{\epsilon_x^{y_l}}{y_l}$$



$$\frac{M_z}{E \cdot I_z} = \frac{\epsilon_x^{y_l}}{y_l}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}$$



ορθές τάσεις:

$$\sigma_x^{y_l} = \frac{M_z \cdot y_l}{I_z}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta) \approx \theta$$



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{R}$$



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}$$

# Μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων

- *γεωμετρικές μέθοδοι:*
  - χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό μετατοπίσεων (βυθίσεων) και στροφών (κλίσεων) συγκεκριμένων σημείων στα μέλη ενός φορέα λόγω καμπτικών παραμορφώσεων παραλείποντας τη συνεισφορά των τεμνουσών και αξονικών δυνάμεων στις παραμορφώσεις.
  - βασίζονται στις προηγούμενες διαφορικές εξισώσεις ( $\Delta E$ )
- *ενεργειακές μέθοδοι:*
  - βασίζονται στο ισοζύγιο της εσωτερικής ελαστικής ενέργειας (ή εσωτερικού έργου) και του εξωτερικού έργου (πραγματικό ή δυνατό)
    - εξωτερικό έργο: το έργο που παράγεται από τα εξωτερικά φορτία κατά τη μετακίνηση τους λόγω παραμορφώσεων του φορέα
    - εσωτερικό έργο ή αλλιώς ελαστική ενέργεια: η ενέργεια, ή το εσωτερικό έργο, η οποία αποθηκεύεται στο υλικό λόγω τάσεων και παραμορφώσεων.
  - πρακτικά πολύ πιο συστηματικές και χρήσιμες από τις γεωμετρικές

# Γεωμετρικές μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων

- Μέθοδος διπλής ολοκλήρωσης (*double integration method*)
- Μέθοδος ροπών (*moment-area method*)
- Μέθοδος ομόλογης δοκού (*conjugate beam method*)

⇒ Χρησιμοποιούνται για να υπολογισθούν βυθίσεις και κλίσεις σημείων της παραμορφωμένης μορφής της δοκού, λαμβάνοντας υπόψη μόνο καμπτικές παραμορφώσεις.

# Μέθοδος διπλής ολοκλήρωσης (*double integration method*)

- Ολοκληρώνοντας την ΔΕ:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I_z}$$



κλίση

$$\theta \approx \varepsilon\phi(\theta) = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{E \cdot I_z} dx + C_1$$



βύθιση

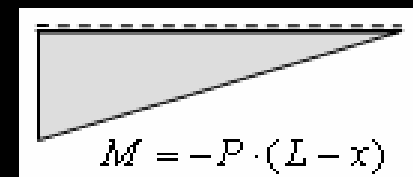
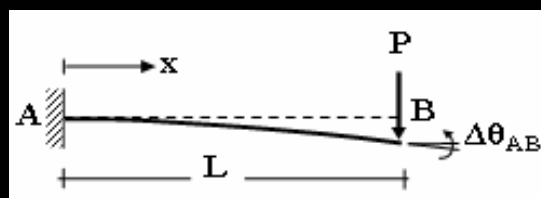
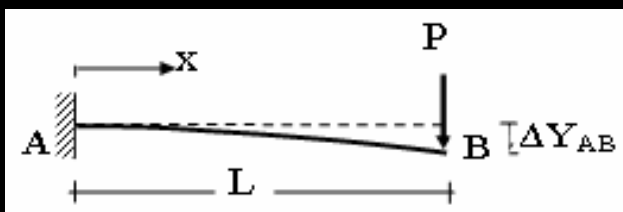
$$y(x) = \iint \frac{M}{E \cdot I_z} dx + C_1 \cdot x + C_2$$

- Οι σταθερές ολοκλήρωσης  $C_1$  και  $C_2$  προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες στις στηρίξεις ή στις θέσεις συνδέσεων επιμέρους τμημάτων μιας δοκού.

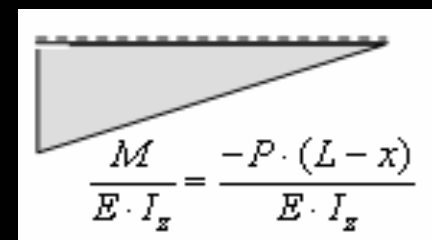
- Θετική προσήμανση:  
(που έχει χρησιμοποιηθεί εδώ)

Θετική βύθιση: προς τα πάνω  
Θετική στροφή: αντισωρολογιακή φορά

# Παράδειγμα μεθόδου διπλής ολοκλήρωσης # 1



$$M(x) = -P \cdot (L - x)$$



$$\theta(x) \approx \frac{dy(x)}{dx} = \int \frac{M}{E \cdot I_z} dx = \int \frac{-P \cdot (L - x)}{E \cdot I_z} dx = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

$$\theta(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$\theta(x) = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right)$$

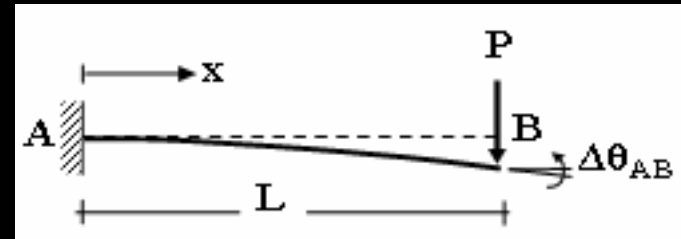
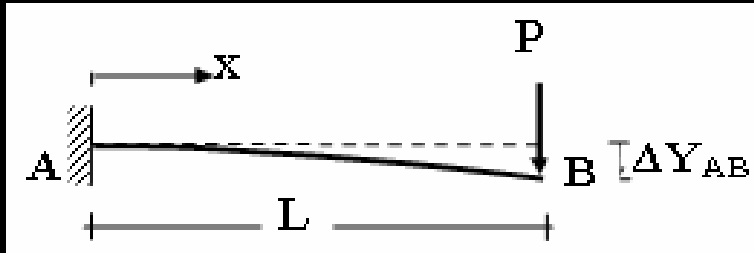
$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) dx = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( \frac{L \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_2$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$y(x) = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( \frac{L \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$



# Παράδειγμα μεθόδου διπλής ολοκλήρωσης # 1 (συν.)



$$\theta(x) = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right)$$



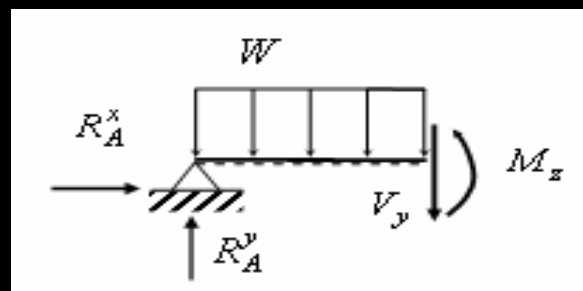
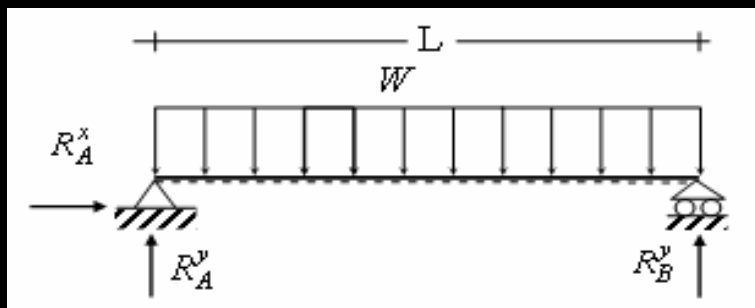
$$\theta(x=L) = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( L^2 - \frac{L^2}{2} \right) \Rightarrow \underline{\theta(L) = -\frac{P L^2}{2 E \cdot I_z}}$$

$$y(x) = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( \frac{L \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$



$$y(x=L) = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( \frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6} \right) \Rightarrow \underline{y(L) = -\frac{P L^3}{3 \cdot E \cdot I_z}}$$

## Παράδειγμα μεθόδου διπλής ολοκλήρωσης # 2



$$M(x) = \frac{W \cdot L \cdot x}{2} - \frac{W \cdot x^2}{2}$$

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{E \cdot I_z} \left( \frac{W \cdot L \cdot x^2}{4} - \frac{W \cdot x^3}{6} + C_1 \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I_z}$$

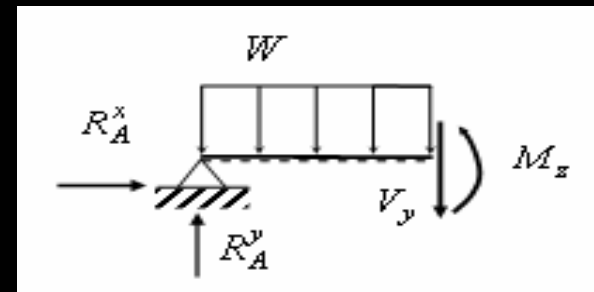
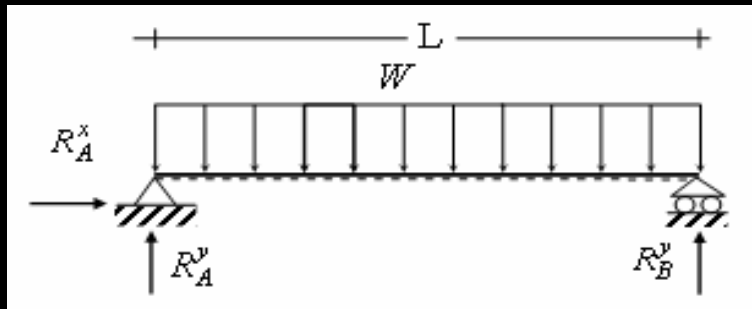
$$y(x) = \frac{1}{E \cdot I_z} \left( \frac{W \cdot L \cdot x^3}{12} - \frac{W \cdot x^4}{24} + C_1 \cdot x + C_2 \right)$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow y(0) = \frac{C_2}{E \cdot I_z} \Rightarrow \underline{C_2 = 0}$$

$$\underline{C_1 = -\frac{W \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I_z}}$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow y(L) = \frac{1}{E \cdot I_z} \left( \frac{W \cdot L^4}{12} - \frac{W \cdot L^4}{24} + C_1 \cdot L \right) = 0$$

# Παράδειγμα μεθόδου διπλής ολοκλήρωσης # 2 (συν.)



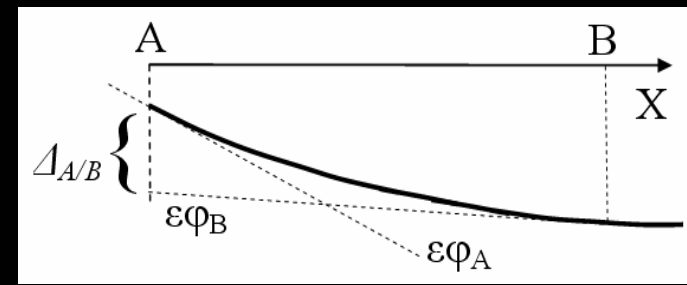
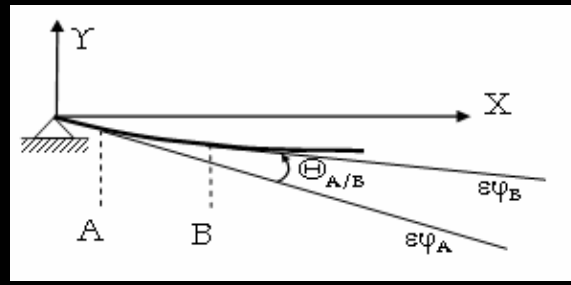
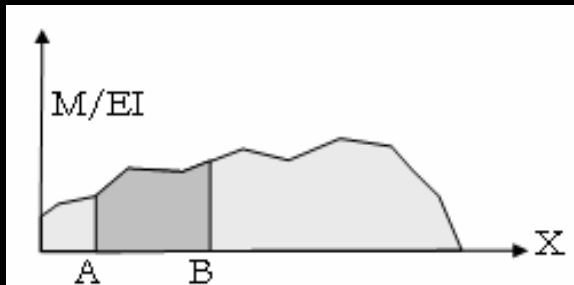
$$y(x) = \frac{1}{E \cdot I_z} \left( \frac{W \cdot L \cdot x^3}{12} - \frac{W \cdot x^4}{24} - \frac{W \cdot L^3}{24} \cdot x \right)$$

$$\theta(x) = \frac{1}{E \cdot I_z} \left( \frac{W \cdot L \cdot x^2}{4} - \frac{W \cdot x^3}{6} - \frac{W \cdot L^3}{24} \right)$$

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{E \cdot I_z} \left( \frac{W \cdot L \cdot L^3}{96} - \frac{W \cdot L^4}{384} - \frac{W \cdot L^4}{48} \right) = \frac{-5 \cdot W \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I_z}$$

$$\theta_A = \theta(0) = \frac{1}{E \cdot I_z} \left( -\frac{W \cdot L^3}{24} \right) = -\frac{W \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I_z}$$

# Μέθοδος ροπών (*moment-area method*)

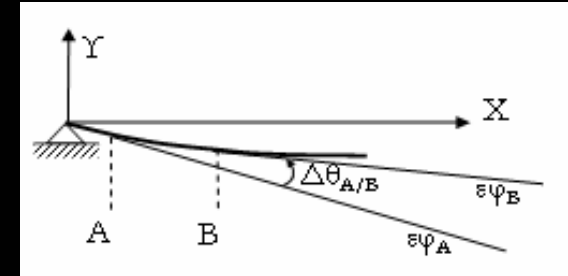
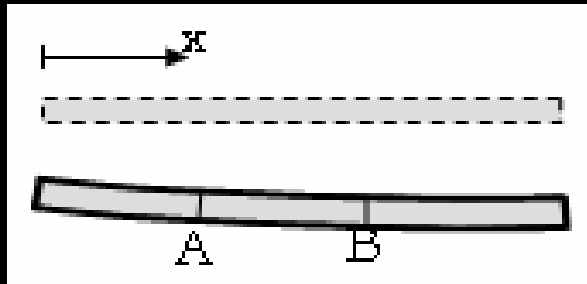
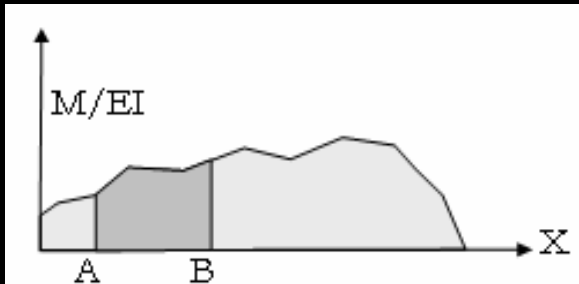


**1<sup>ον</sup> Θεώρημα:** “Η μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης σε δύο σημεία μιας συνεχούς παραμορφωμένης δοκού ισούται με το εμβαδόν του διαγράμματος  $M/EI$  μεταξύ αυτών των δύο σημείων”

**2<sup>ον</sup> Θεώρημα:** “Η κάθετη εφαπτομενική διαφορά  $\Delta_{A/B}$  της εφαπτόμενης στο σημείο  $A$  ως προς την εφαπτόμενη από ένα άλλο σημείο  $B$  μιας παραμορφωμένης δοκού, ισούται με τη ροπή του διαγράμματος  $M/EI$  μεταξύ των δύο σημείων ως προς το σημείο  $A$ , στο οποίο μετράται αυτή η, συνήθως κατακόρυφη, διαφορά.”

- μπορούν να χρησιμοποιηθούν πίνακες για το εμβαδόν και τη θέση του κέντρου βάρους κοινών επιφανειών
- χρησιμοποιούνται εφαπτόμενες σε σημεία αγνώστου βύθισης και κλίσης και σε σημεία στηρίξεων, όπου οι μετακινήσεις συνήθως είναι μηδενικές

# Μέθοδος ροπών: 1<sup>ο</sup>ν Θεώρημα



$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$



δίνει την αλλαγή της κλίσης των εφαπτόμενων στα άκρα ενός απειροστού τμήματος μήκους

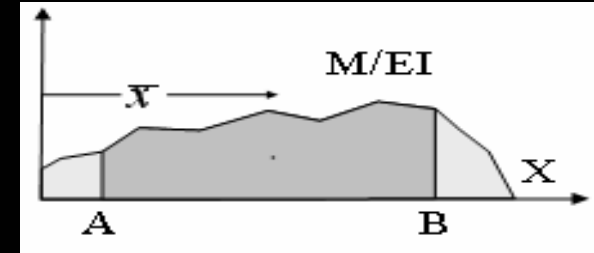
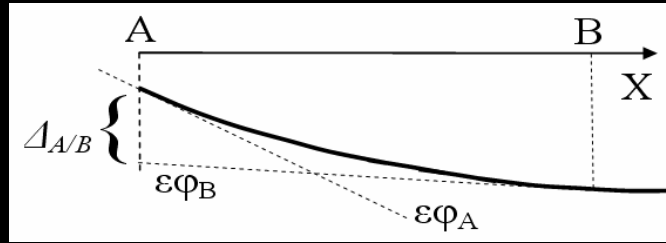
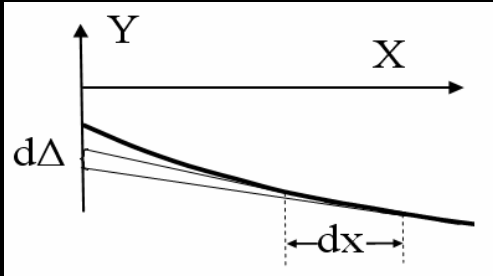


η μεταβολή της κλίσης μεταξύ των εφαπτόμενων σε δύο σημεία:

$$\theta_{A/B} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{E \cdot I} dx$$

- η γωνία  $\theta_{A/B}$  μετράται εδώ σε ακτίνια (radians) αντιωρολογιακά μεταξύ της εφαπτόμενης στο σημείο A προς την εφαπτόμενη στο σημείο B
- δεν ισχύει για δοκούς με εσωτερικές ελευθερίες στροφών

# Μέθοδος ροπών: 2<sup>ον</sup> Θεώρημα



$$d\Delta = \bar{x} \cdot d\theta$$

$$d\theta = \frac{M dx}{EI}$$

$$d\Delta = \bar{x} \cdot \frac{M}{EI} dx$$



$$\Delta_{A/B} = \int_A^B d\Delta = \bar{x} \cdot \int_A^B d\theta$$

συντεταγμένη  
κέντρου βάρους

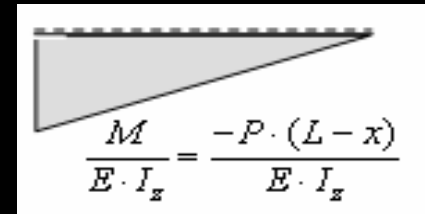
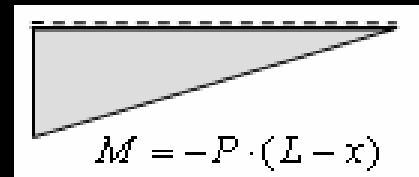
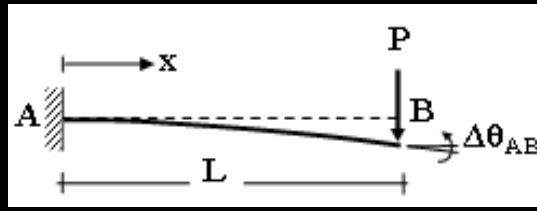
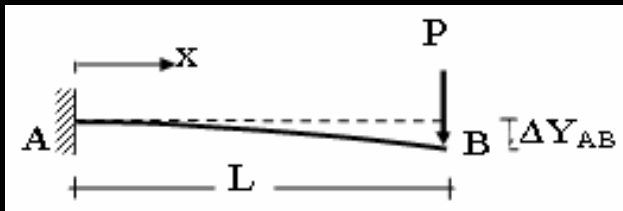
$$\bar{x} = \int_{x_A}^{x_B} x dx$$



$$\Delta_{A/B} = \bar{x} \cdot \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{E \cdot I} dx$$

Αν είναι θετικό (ή αρνητικό) το εμβαδόν της επιφάνειας του διαγράμματος  $M/EI$  από το  $A$  στο  $B$ , η εφαπτόμενη στο  $A$  είναι από πάνω (ή από κάτω, αντίστοιχα) από την εφαπτόμενη στο σημείο  $B$

# Παράδειγμα μεθόδου ροπών # 1



$$M(x) = -P \cdot (L - x)$$

αναλυτικά:

γραφικά (2<sup>ο</sup> θεώρημα):

$$\Delta_{BA} = -\frac{P \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{2 \cdot L}{3} = -\frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$\Delta_{B/A} = \bar{x} \cdot \int_{X_A}^{X_B} \frac{M}{E \cdot I} dx = \frac{2 \cdot L}{3} \cdot \int_{X_A}^{X_B} \frac{-P \cdot (L - x)}{E \cdot I} dx = -\frac{2 \cdot P \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{X_A=0}^{X_B=L} = -\frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

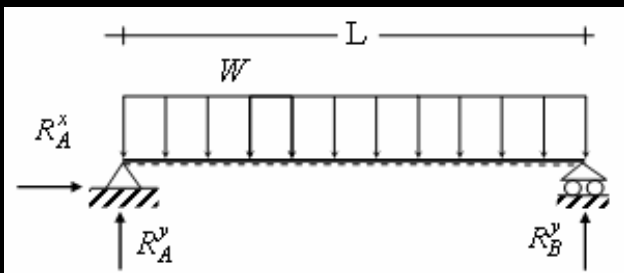
αναλυτικά:

γραφικά (1<sup>ο</sup> θεώρημα):

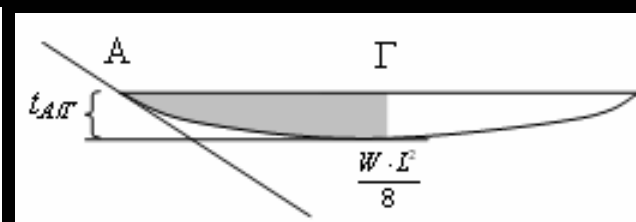
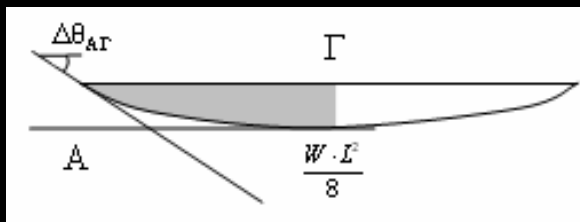
$$\theta_{A/B} = -\frac{P \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$\theta_{A/B} = \int_{X_A}^{X_B} \frac{M}{E \cdot I} dx = -\frac{P}{E \cdot I} \int_{X_A}^{X_B} (L - x) dx = -\frac{P}{E \cdot I} \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{X_A=0}^{X_B=L} = -\frac{P \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

## Παράδειγμα μεθόδου ροπών # 2



$$R_A^y = R_B^y = \frac{W \cdot L}{2}$$



$$M(x) = \frac{W \cdot L \cdot x}{2} - \frac{W \cdot x^2}{2}$$



1<sup>ο</sup> θεώρημα:

$$\theta_{A/\Gamma} = \int_{x_A}^{x_\Gamma} \frac{M}{E \cdot I} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{W \cdot L^2}{8 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{L}{2} = \frac{W \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$



2<sup>ο</sup> θεώρημα:

$$\Delta_{A/\Gamma} = \frac{\cancel{L}}{3} \cdot \frac{W \cdot L^2}{8 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{L}{\cancel{L}} \cdot \left( \frac{L}{2} - \frac{3 \cdot L}{8 \cdot 2} \right) = \frac{5 \cdot W \cdot L^3}{384 \cdot E \cdot I}$$

- η γωνία  $\Theta_{A/\Gamma}$  μετράται (σε ακτίνια) αντιωρολογιακά μεταξύ της εφαπτόμενης στο σημείο A προς την εφαπτόμενη στο σημείο Γ
- η εφαπτόμενη στο A είναι πάνω από την εφαπτόμενη στο Γ, εφόσον είναι θετική η κατακόρυφη διαφορά των εφαπτόμενων στα σημεία A και Γ μετρούμενες στο A



# Μέθοδος ομόλογης δοκού (*conjugate-beam method*)

- πλήρης αντιστοιχία μεταξύ των  $\Delta E$  που συνδέουν τις τέμνουσες δυνάμεις και καμπτικές ροπές με το επιβαλλόμενο φορτίο και των  $\Delta E$  που συνδέουν τη βύθιση και κλίση μιας παραμορφωμένης δοκού με την καμπυλότητα.

$$\frac{dV}{dx} = -w(x)$$



$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -w(x)$$



$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

⇒ εκμεταλλευόμενοι αυτή την πλήρη αντιστοιχία να υπολογίσουμε τις βυθίσεις και κλίσεις μιας δοκού χρησιμοποιώντας μια άλλη βοηθητική δοκό, η οποία ονομάζεται **συζυγής δοκός** ή **ομόλογη δοκός**,


# Μέθοδος ομόλογης δοκού (*conjugate-beam method*)

- η ομόλογη δοκός έχει το ίδιο μήκος με την πραγματική δοκό και στηρίξεις και φόρτιση που τηρούν την πιο πάνω αντιστοιχία.

⇒ η ομόλογη δοκός θα πρέπει να φορτιστεί με φορτίο  $M/EI$ , το οποίο προκύπτει από την επίλυση της πραγματικής δοκού κάτω από τη φόρτιση και την εύρεση των καμπτικών ροπών κατά μήκος της δοκού

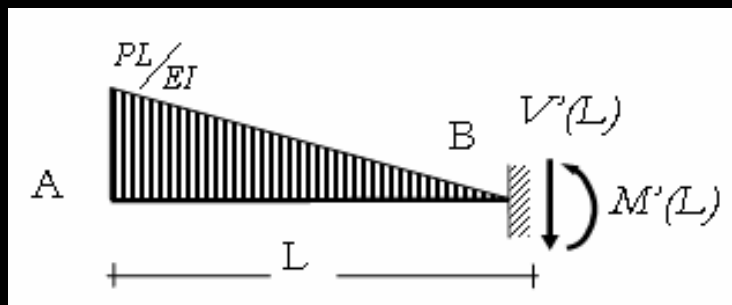
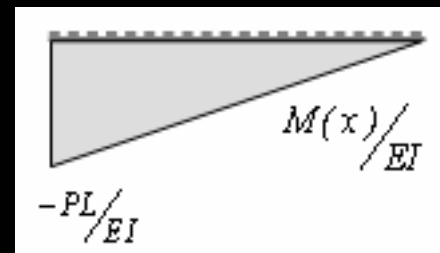
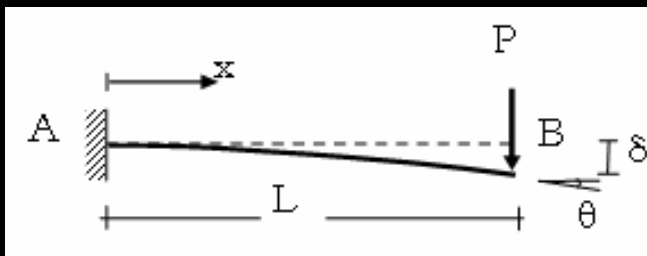
⇒ αυτό το φορτίο πρέπει να επιβληθεί προς τα πάνω ή κάτω, ανάλογα με το εάν το είναι θετικό ή αρνητικό, αντίστοιχα.

⇒ για την πλήρη αντιστοιχία, σε όποια σημεία η πραγματική δοκός έχει μηδενική τέμνουσα ή ροπή, θα πρέπει η ομόλογη δοκός να έχει μηδενική κλίση ή βύθιση, αντίστοιχα αλλά και αντίστροφα.



“Η βύθιση  $y(x)$  και η κλίση  $\theta(x)$  σε ένα σημείο της πραγματικής δοκού ισούνται, αντίστοιχα, με την αντίστοιχη καμπτικών ροπή  $M(x)$  και την τέμνουσα δύναμη  $V(x)$  στο αντίστοιχο σημείο της ομόλογης δοκού”

# Παράδειγμα μεθόδου ομόλογης δοκού # 1

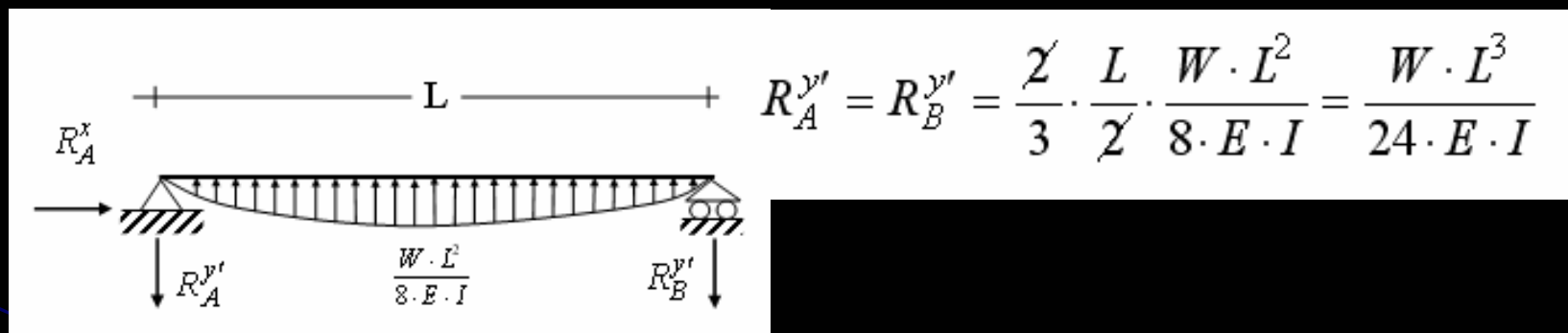
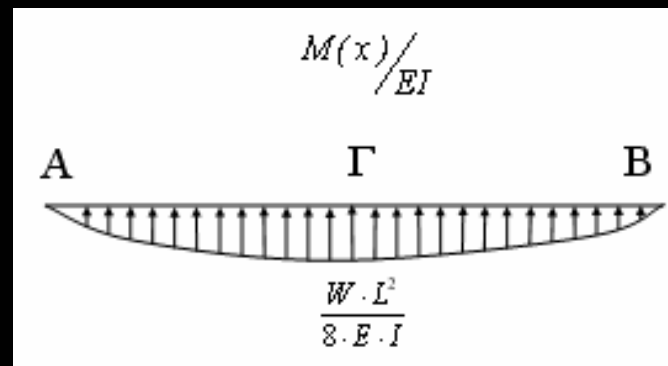
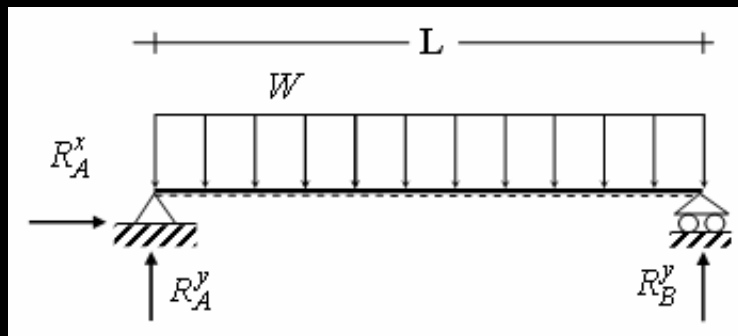


ισορροπία  
ομόλογης  
δοκού:

$$\theta_B = V'(L) = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$$y_B = M'(L) = -\frac{PL^3}{3EI}$$

## Παράδειγμα μεθόδου ομόλογης δοκού # 2



$$\theta_B = V'(0) = -R_A^{y'} = -\frac{W \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$y_B = M'\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{W \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{L}{2} - \frac{W \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{L}{2} = \frac{W \cdot L^4}{128 \cdot E \cdot I} - \frac{W \cdot L^4}{48 \cdot E \cdot I} = -\frac{5 \cdot W \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I}$$