

ΠΠΜ 220: Στατική Ανάλυση των Κατασκευών Ι

Διάλεξη 12^η

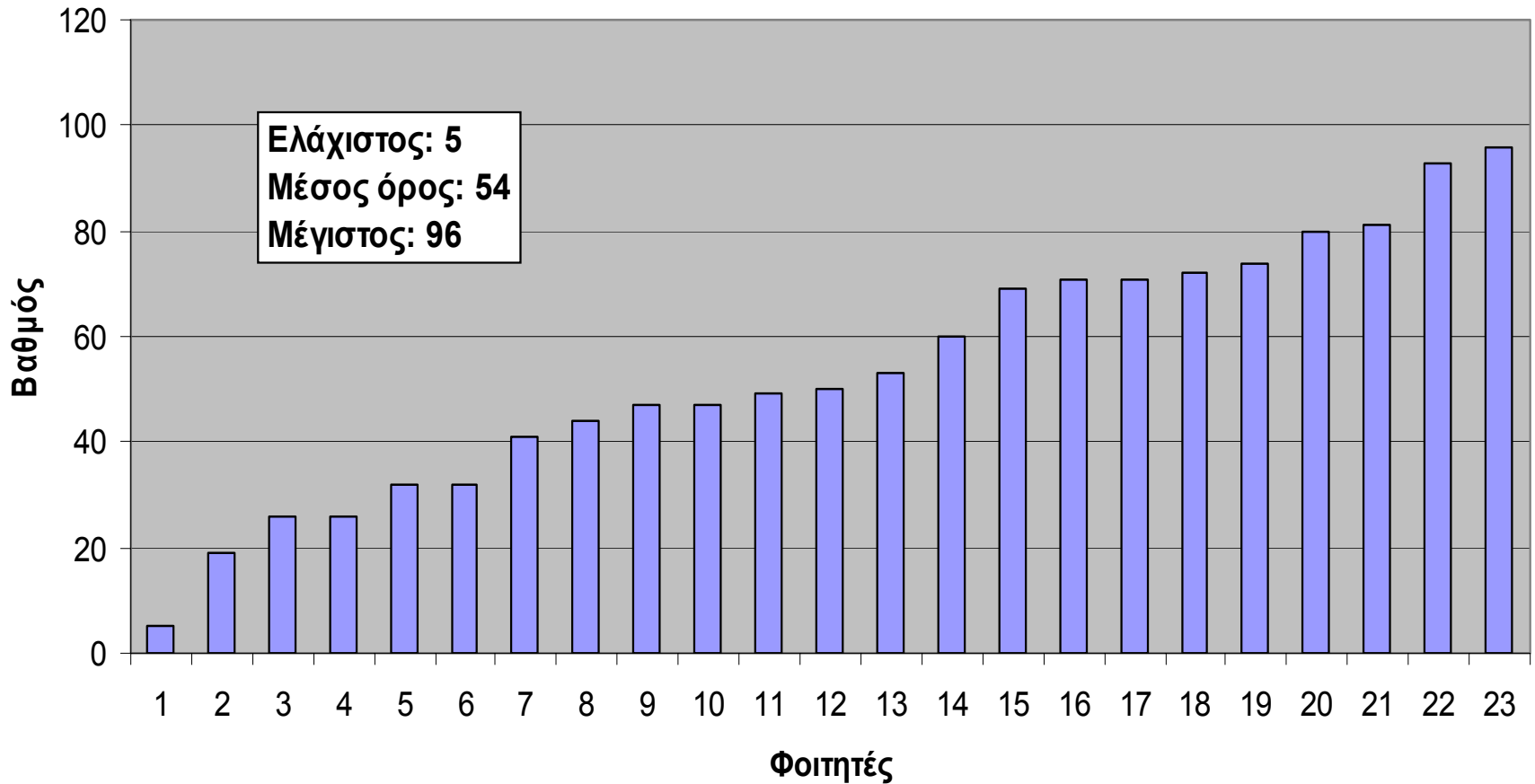
Επίλυση 2ας Προόδου & Εισαγωγή στις Παραμορφώσεις και Μετακινήσεις

Τρίτη 5 Οκτωβρίου, 2004

Πέτρος Κωμοδρόμος
komodromos@ucy.ac.cy
<http://www.ucy.ac.cy/~petrosk>

Επίλυση 2^{ας} Προόδου

Βαθμολογία 2ης Προόδου



Διευκρίνιση για την βαθμολογία

- Αξιολόγηση και βαθμολόγηση μαθήματος:

Μέθοδος αξιολόγησης	Συντελεστής Βαρύτητας
Συμμετοχή	5 %
Ασκήσεις	20 %
Ενδιάμεσα διαγωνίσματα	25 %
Τελική εξέταση	50 %

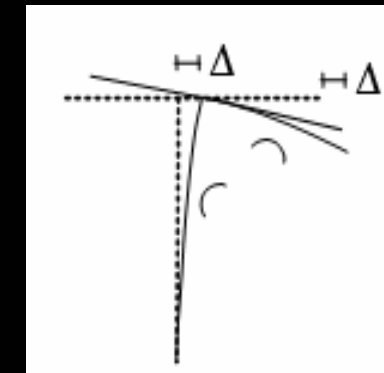
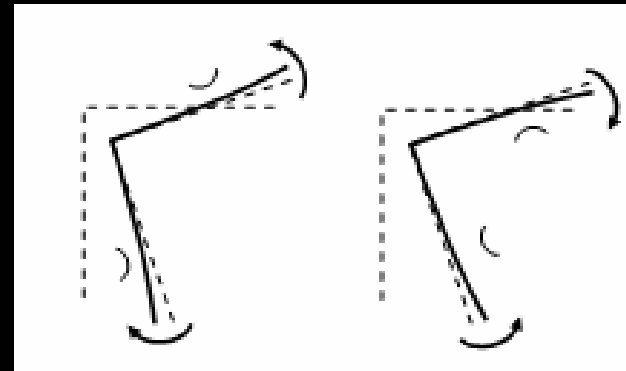
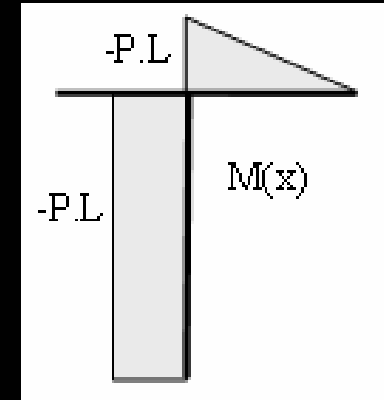
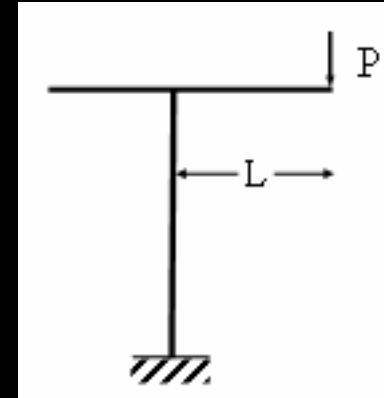
- Η παρακολούθηση των διαλέξεων είναι υποχρεωτική και αναγκαία για την επιτυχή ολοκλήρωση και την επίτευξη των στόχων του μαθήματος.
- Εάν υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ της βαθμολογίας των ασκήσεων και των διαγωνισμάτων (προόδων και τελικού διαγωνίσματος), τότε δεν θα ισχύσει η πιο πάνω βαθμολογική κατανομή.*

Θέματα

- Παραμορφωμένες μορφές δοκών και πλαισίων
- Χρησιμότητα υπολογισμού παραμορφώσεων και μετακινήσεων
- Συνήθης παραδοχές
- Εισαγωγή στις παραμορφώσεις και μετακινήσεις
 - Αξονικές παραμορφώσεις
 - Καμπτικές παραμορφώσεις
- Μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων
 - Γεωμετρικές μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων
 - Ενεργειακές μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων

Παραμορφωμένες μορφές δοκών και πλαισίων

- μετακινήσεις δοκών και πλαισίων:
 - κυρίως λόγω καμπτικών παραμορφώσεων
- σχεδιασμός παραμορφωμένης μορφής:
 - κατασκευή διαγράμματος καμπτικών ροπών (ΔKP)
 - καμπυλότητα συμβατή με ΔKP
 - συμβατότητα με δεσμεύσεις στις στηρίξεις
 - συμβατότητα με συνδέσεις μελών
 - αμετάβλητες σταθερές συνδέσεις κόμβων
 - ευκρινής καθορισμός
 - της φοράς μετατοπίσεων και στροφών
 - της καμπυλότητας (κοίλα)
 - των σημείων καμπής
 - ισορροπία κόμβων



Χρησιμότητα υπολογισμού παραμορφώσεων και μετακινήσεων

- Έλεγχοι

- ασφάλειας

- εντατικών μεγεθών σε σχέση με τις επιτρεπόμενες αντοχές

- λειτουργικότητας

- διασφαλίζονται λειτουργικές ανάγκες μιας κατασκευής (π.χ. έλεγχος παραμορφώσεων και μετακινήσεων)

⇒ αναγκαίος ο υπολογισμός των παραμορφώσεων και μετακινήσεων ενός φορέα κάτω από την επίδραση κάποιων συγκεκριμένων δράσεων ή συνδυασμών δράσεων για σκοπούς *ελέγχου λειτουργικότητας*

- Επίσης, απαραίτητος είναι ο υπολογισμός των μετακινήσεων κατά την επίλυση υπερστατικών φορέων για την οποία δεν αρκούν οι εξισώσεις ισορροπίας

⇒ Οι επιπλέον εξισώσεις προκύπτουν από την διατύπωση της συμβιβαστότητας των παραμορφώσεων και μετακινήσεων του φορέα

Συνήθης παραδοχές

- Μικρές παραμορφώσεις και μετακινήσεις σε σχέση με τις διαστάσεις
⇒ χρήση αρχικής απαραμόρφωτης γεωμετρία και μορφής του φορέα
 - Γραμμική-ελαστική συμπεριφορά του υλικού $\tau = E \cdot \varepsilon$
 - γραμμική συμπεριφορά: οι τάσεις είναι ανάλογες των παραμορφώσεων
 - ελαστική συμπεριφορά: αν αφαιρεθούν όλα τα φορτία από τον φορέα τότε αυτός θα επιστρέψει στην αρχική αφόρτιστη θέση και γεωμετρία του χωρίς παραμένουσες παραμορφώσεις
 - Αρχή της επαλληλίας.
 - Αρχή της επιπεδότητας των διατομών (Bernoulli)
 - Για γραμμικά μέλη υπό καμπτικές παραμορφώσεις θεωρείται ότι επίπεδες διατομές που είναι κάθετες στον άξονα ενός μέλους παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα ενός μέλους μετά την παραμόρφωση
- ⇒ έτσι, έχοντας γραμμικά ελαστικό υλικό υπάρχει μια γραμμική μεταβολή των ορθών τάσεων μεταξύ των ακραίων ινών στα πέλματα ενός μέλους

Εισαγωγή στις παραμορφώσεις και μετακινήσεις

- Ράβδοι δικτυωμάτων:
 - μόνο αξονικές δυνάμεις και παραμορφώσεις
- ⇒ υπολογισμός μετακινήσεων λαμβάνοντας υπόψη μόνο αξονικές παραμορφώσεις

- Δοκοί
 - η συνεισφορά των αξονικών και διατμητικών παραμορφώσεων στις μετακινήσεις μίας δοκού ή ενός πλαισίου είναι συνήθως αμελητέα συγκρινόμενη με τις καμπτικές παραμορφώσεις.
- ⇒ στις συνήθεις περιπτώσεις δοκών και πλαισίων μπορούμε να λάβουμε υπόψη μόνο τις καμπτικές παραμορφώσεις κατά τον υπολογισμό των μετακινήσεων αλλά και στην διατύπωση των εξισώσεων συμβιβαστότητας των μετακινήσεων, αγνοώντας τις αξονικές και διατμητικές παραμορφώσεις

Αξονικές παραμορφώσεις

- τα μέλη των δικτυωμάτων καταπονούνται μόνο από αξονικές δυνάμεις N , οι οποίες αντιστοιχούν σε ομοιόμορφες ορθές τάσεις:

⇒ ομοιόμορφες ορθές τάσεις

$$\sigma_x = \tau_{xx} = \frac{N}{A}$$

- Νόμος του Hooke

$$\tau_{xx} = \sigma_x = E \varepsilon_{xx}$$

⇒ (συσχετίζει ορθές τάσεις και παραμορφώσεις)

(E : μέτρο ελαστικότητας/*modulus of elasticity*)

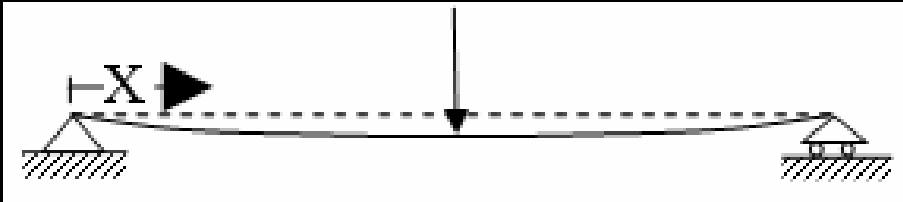
- επιμήκυνση ΔL μίας ράβδου

- μήκους, L
- διατομής, A

$$\Delta L = \varepsilon_{xx} \cdot L = \frac{\sigma_{xx}}{E} \cdot L = \frac{N \cdot L}{A \cdot E}$$

Καμπτικές παραμορφώσεις

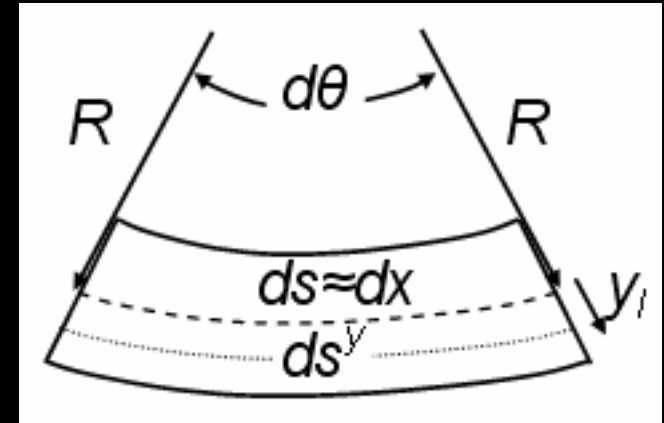
- ο άξονας της δοκού παραμορφώνεται με τέτοιο τρόπο που τοπικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελείται από τμήματα κυκλικών τόξων με συγκεκριμένη ακτίνα καμπυλότητας.



- Χρήση ΔΚΡ για τον προσδιορισμό της καμπυλότητας
 - π.χ. στο πιο πάνω παράδειγμα, η θετική ροπή προκαλεί καμπτικές παραμορφώσεις με εφελκυσμό στις κάτω ίνες και θλίψη στις πάνω ίνες
 - οι παραμορφώσεις κάθετα στον άξονα της δοκού παριστάνονται ιδιαίτερα επαυξημένες ώστε να είναι πιο ευδιάκριτες
- ⇒ είναι απαραίτητο να μπορούν να υπολογιστούν οι *βυθίσεις* και *κλίσεις* κατά μήκος του *ουδέτερου άξονα*, δηλαδή να προσδιοριστεί η ελαστική καμπύλη, ή *ελαστική γραμμή*, μιας παραμορφωμένης δοκού.

Καμπτικές παραμορφώσεις (συν.)

- απειροστό τμήμα της δοκού μήκους dx
 - μόνο η ίνα στον ουδέτερο άξονα δεν παραμορφώνεται
 - οι ίνες κάτω και πάνω από την ίνα αυτή θλίβονται και εφελκύνονται αντίστοιχα με την καμπτική ροπή



- ουδέτερο επίπεδο - ουδέτερος άξονας της δοκού

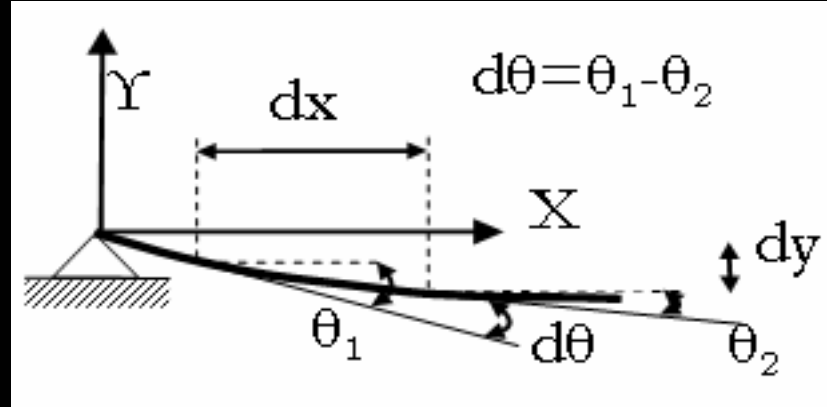
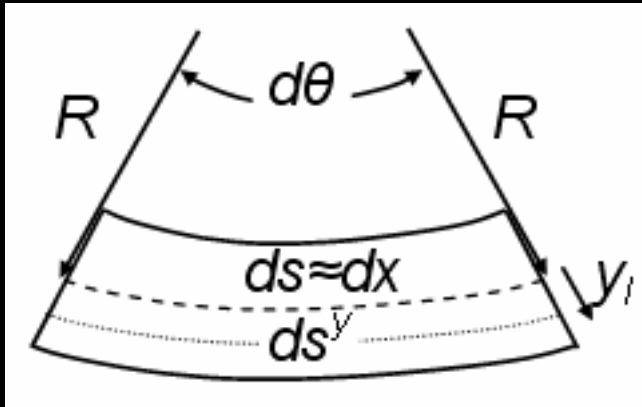
$$ds = dx = R \cdot d\theta$$

- *Αρχή του Bernoulli:*

κατά την καμπτική παραμόρφωση μίας δοκού, επίπεδα τα οποία είναι κάθετα στον άξονα της δοκού πριν από την παραμόρφωση της δοκού, θεωρούνται ότι παραμένουν μετά την παραμόρφωση επίπεδα και κάθετα στον παραμορφωμένο ουδέτερο άξονα της δοκού

$$d\theta = \theta_1 - \theta_2$$

Καμπτικές παραμορφώσεις (συν.)



- καμπυλότητα: η αλλαγή της κλίσης της ελαστικής καμπύλης της δοκού λόγω των καμπτικών παραμορφώσεων

$$ds = dx = R \cdot d\theta$$



$$\frac{l}{R} = \frac{d\theta}{dx}$$

- μήκος του τόξου παραμορφωμένης ίνας σε απόσταση y_l από τον ουδέτερο άξονα:

$$ds^{y_l} = (R + y_l) \cdot d\theta$$

- παραμόρφωση σε απόσταση y_l :

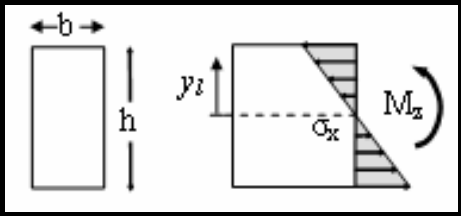
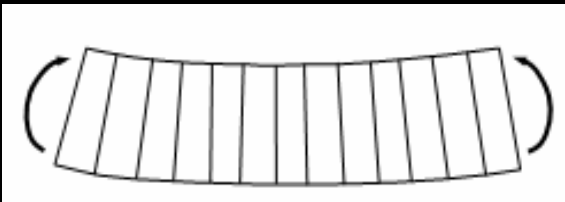
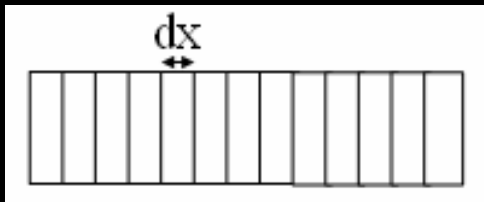
$$\epsilon_x^{y_l} = \frac{(R + y_l) \cdot d\theta - R \cdot d\theta}{R \cdot d\theta} = \frac{y_l}{R}$$



καμπυλότητα:

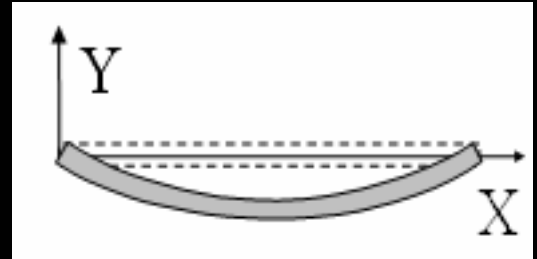
$$K_R = \frac{l}{R} = \frac{\epsilon_x^{y_l}}{y_l}$$

Καμπτικές παραμορφώσεις (συν.)



- αν το υλικό έχει γραμμική-ελαστική συμπεριφορά
- καμπτική ροπή μιας παραμορφωμένης δοκού βάσει του ολοκληρώματος των ορθών τάσεων επί την απόσταση από τον ουδέτερο άξονα στην επιφάνεια της διατομής:

$$\sigma_x = \tau_{xx} = E \cdot \varepsilon_x$$



$$M_z = \iint_A \sigma_x \cdot y_l \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot y_l \cdot b \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} E \cdot \varepsilon_x \cdot y_l \cdot b \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} E \cdot \frac{y_l}{R} \cdot y_l \cdot b \, dy = \frac{E}{R} \int_{-h/2}^{h/2} y_l^2 \cdot b \, dy$$

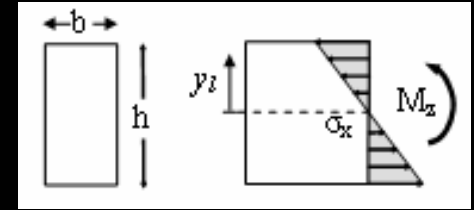
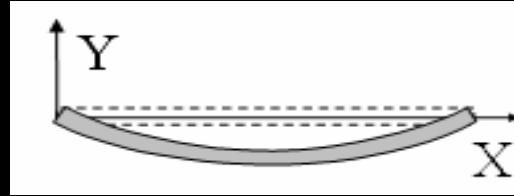
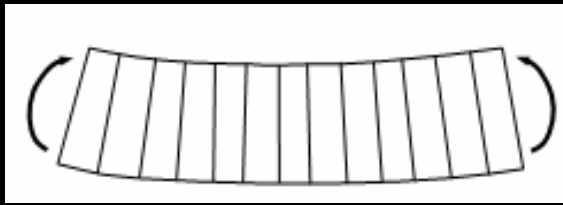
- ροπή αδράνειας:

$$I_z = \int_{-h/2}^{h/2} y_l^2 \cdot b \, dy$$



$$M_z = \frac{E \cdot I_z}{R}$$

Καμπτικές παραμορφώσεις (συν.)



$$M_z = \frac{E \cdot I_z}{R}$$



$$K_R = \frac{l}{R} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}$$



$$M_z = E \cdot I_z \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$K_R = \frac{l}{R} = \frac{\varepsilon_x^{y_l}}{y_l}$$



$$\frac{M_z}{E \cdot I_z} = \frac{\varepsilon_x^{y_l}}{y_l}$$

$$\frac{l}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''$$



ορθές τάσεις:

$$\sigma_x^{y_l} = \frac{M_z \cdot y_l}{I_z}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta) \approx \theta$$



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{l}{R}$$



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}$$

Μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων

- *γεωμετρικές μέθοδοι:*
 - χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό μετατοπίσεων (βυθίσεων) και στροφών (κλίσεων) συγκεκριμένων σημείων στα μέλη ενός φορέα λόγω καμπτικών παραμορφώσεων παραλείποντας τη συνεισφορά των τεμνουσών και αξονικών δυνάμεων στις παραμορφώσεις.
 - βασίζονται στις προηγούμενες διαφορικές εξισώσεις (ΔE)
- *ενεργειακές μέθοδοι:*
 - βασίζονται στο ισοζύγιο της εσωτερικής ελαστικής ενέργειας (ή εσωτερικού έργου) και του εξωτερικού έργου (πραγματικό ή δυνατό)
 - εξωτερικό έργο: το έργο που παράγεται από τα εξωτερικά φορτία κατά τη μετακίνηση τους λόγω παραμορφώσεων του φορέα
 - εσωτερικό έργο ή αλλιώς ελαστική ενέργεια: η ενέργεια, ή το εσωτερικό έργο, η οποία αποθηκεύεται στο υλικό λόγω τάσεων και παραμορφώσεων.
 - πρακτικά πολύ πιο συστηματικές και χρήσιμες από τις γεωμετρικές