ΠΠΜ 220: Στατική Ανάλυση των Κατασκευών Ι

Διαλέξεις 17-21

Ενεργειακές Μέθοδοι Υπολογισμού Μετακινήσεων

Παρασκευή, 15, Τρίτη, 19,
Τετάρτη, 20, Παρασκευή 22 και
Τρίτη, 26, Οκτωβρίου, 2004

Πέτρος Κωμοδρόμος
komodromos@ucy.ac.cy
http://www.ucy.ac.cy/~petrosk

Θέματα

- Εισαγωγή στις ενεργειακές μεθόδους
- Εξωτερικό έργο
- Εσωτερικό έργο (Ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης)
  - Ελαστική ενέργεια λόγω αξονικών δυνάμεων
  - Ελαστική ενέργεια λόγω καμπτικών ροπών
  - Ελαστική ενέργεια λόγω τεμνουσών δυνάμεων
- Αρχή διατήρησης της ενέργειας (πραγματικό έργο)
- Θεωρήματα Castigliano
  - 1ο θεώρημα Castigliano
  - 2ο θεώρημα Castigliano
- Αρχή δυνατών έργων (ΑΔΕ)

Χρησιμότητα υπολογισμού παραμορφώσεων και μετακινήσεων

- Έλεγχοι
  - *ασφάλειας*
    - εντατικών μεγεθών σε σχέση με τις επιτρεπόμενες αντοχές
  - *λειτουργικότητας*
    - διασφαλίζονται λειτουργικές ανάγκες μιας κατασκευής

    (π.χ. έλεγχος παραμορφώσεων και μετακινήσεων)

  ⇨ αναγκαίος ο υπολογισμός των παραμορφώσεων και μετακινήσεων ενός φορέα κάτω από την επίδραση κάποιων συγκεκριμένων δράσεων ή συνδυασμών δράσεων για σκοπούς *ελέγχου λειτουργικότητας*

- Επίσης, απαραίτητος είναι ο υπολογισμός των μετακινήσεων κατά την επίλυση υπερστατικών φορέων για την οποία δεν αρκούν οι εξισώσεις ισορροπίας

  ⇨ Οι επιπλέον εξισώσεις προκύπτουν από την διατύπωση της συμβιβαστότητας των παραμορφώσεων και μετακινήσεων του φορέα

Συνήθης παραδοχές

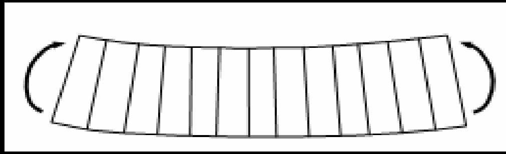
- μικρές παραμορφώσεις και μετακινήσεις σε σχέση με τις διαστάσεις

  ⇨ χρήση αρχικής απαραμόρφωτης γεωμετρία και μορφής του φορέα

- γραμμική-ελαστική συμπεριφορά του υλικού

$$\boxed{\tau = E \cdot \varepsilon}$$

  - γραμμική συμπεριφορά: οι τάσεις είναι ανάλογες των παραμορφώσεων
  - ελαστική συμπεριφορά: αν αφαιρεθούν όλα τα φορτία από τον φορέα τότε αυτός θα επιστρέψει στην αρχική αφόρτιστη θέση και γεωμετρία του χωρίς παραμένουσες παραμορφώσεις



- αρχή της επαλληλίας.
- αρχή της επιπεδότητας των διατομών (Bernoulli)
  - Για γραμμικά μέλη υπό καμπτικές παραμορφώσεις θεωρείται ότι επίπεδες διατομές που είναι κάθετες στον άξονα ενός μέλους παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα ενός μέλους μετά την παραμόρφωση

  ⇨ έτσι, έχοντας γραμμικά ελαστικό υλικό, υπάρχει μια γραμμική μεταβολή των ορθών τάσεων μεταξύ των ακραίων ινών στα πέλματα ενός μέλους

Μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων

- *γεωμετρικές μέθοδοι:*
  - βασίζονται, είτε άμεσα είτε έμμεσα, στην διαφορική εξίσώση (ΔΕ) που συνδέει την καμπτική ροπή με την καμπυλότητα
  - χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό βυθίσεων και στροφών απλών φορέων λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις καμπτικές παραμορφώσεις
  - κύριες γεωμετρικές μέθοδοι:
    - μέθοδος διπλής ολοκλήρωσης (*double integration method*)
    - μέθοδος ροπών (*moment-area method*)
    - μέθοδος ομόλογης δοκού (*conjugate beam method*)
  - παρουσιάζουν σημαντικά μειονεκτήματα ειδικά για την συστηματική γενική ανάλυση πολύπλοκων φορέων.
- *ενεργειακές μέθοδοι:*
  - βασίζονται στο ισοζύγιο της εσωτερικής ελαστικής ενέργειας (ή εσωτερικού έργου) και του εξωτερικού έργου (πραγματικό ή δυνατό)

Εισαγωγή στις ενεργειακές μεθόδους

- βασίζονται στο ισοζύγιο της εσωτερικής ελαστικής ενέργειας (ή εσωτερικού έργου) και του εξωτερικού έργου
  - *εξωτερικό έργο (external work)*: το έργο που παράγεται από τα εξωτερικά φορτία κατά τη μετακίνηση τους λόγω παραμορφώσεων του φορέα
  - *εσωτερικό έργο (internal work)* ή αλλιώς *ελαστική ενέργεια (elastic strain energy)*: η ενέργεια, ή το εσωτερικό έργο, η οποία αποθηκεύεται στο υλικό λόγω τάσεων και παραμορφώσεων

- κύριες ενεργειακές μέθοδοι:
  - *αρχή διατήρησης της ενέργειας* (πραγματικό έργο)
  - *θεωρήματα Castigliano*
  - *αρχή των δυνατών έργων* (ΑΔΕ)

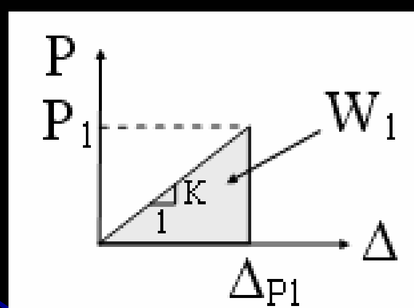
⇨ η ΑΔΕ αποτελεί τη βάση για τον υπολογισμό των μετακινήσεων και τη συστηματική ανάλυση οποιασδήποτε κατασκευής

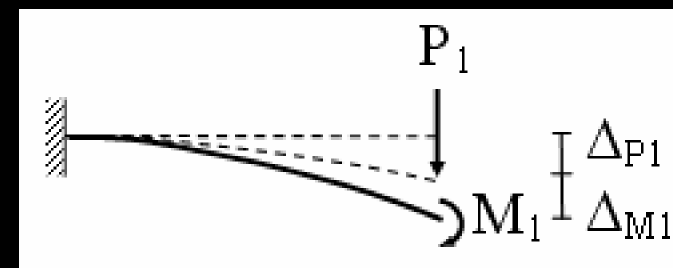
Εξωτερικό έργο

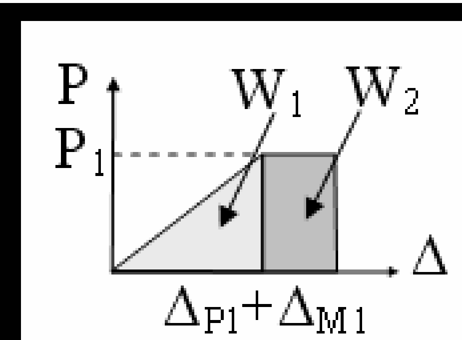
- επιβολή φορτίων σε ένα φορέα
  - ⇨ παραμόρφωση φορέα
  - ⇨ μετακίνηση σημείων εφαρμογής εξωτερικών φορτίων
- εξωτερικό έργο:
  - αν η εφαρμοζόμενη δύναμη ή ροπή παραμένει σταθερή
    ⇨ ισούται με το γινόμενο μιας δύναμης ή ροπής με τη μετακίνηση (μετάθεση ή στροφή) του σημείου εφαρμογής
  - αν η εφαρμοζόμενη δύναμη ή ροπή δεν παραμένει σταθερή
    ⇨ το έργο υπολογίζεται με ολοκλήρωση
- θετικό έργο:
  - όταν η δύναμη ή ροπή και η μετάθεση ή στροφή, αντίστοιχα, είναι στην ίδια διεύθυνση
- αρνητικό το έργο:
  - αν είναι αντίθετης φοράς

Είδη εξωτερικού έργου

- δύο είδη εξωτερικού έργου το οποίο παράγεται από μετακίνηση του σημείου εφαρμογής ενός φορτίου συνεπεία παραμορφώσεων
    - αυτό που συμβαίνει λόγω του ίδιου του φορτίου
    - αυτό που συμβαίνει λόγω άλλων φορτίων





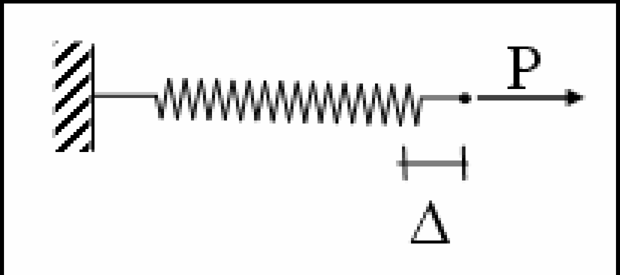


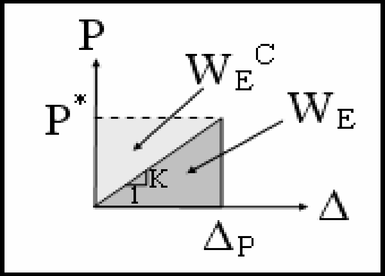
$$W_1 = \int_0^{\Delta_1} P\,d\Delta = \int_0^{\Delta_1} k\cdot\Delta\,d\Delta = \frac{1}{2}k\cdot\Delta_{P1}^{\;2} = \frac{1}{2}P_1\cdot\Delta_{P1}$$

$$W_2 = \int_{\Delta_{P1}}^{\Delta_{P1}+\Delta_{M1}} P\,d\Delta = P\cdot\Delta_{M1}$$

$$\Delta = \frac{P\cdot L^3}{3EI} \Leftrightarrow P = \frac{3EI}{L^3}\cdot\Delta = k\cdot\Delta$$

Γενικευμένες εξισώσεις για γραμμικά ελαστικό υλικό





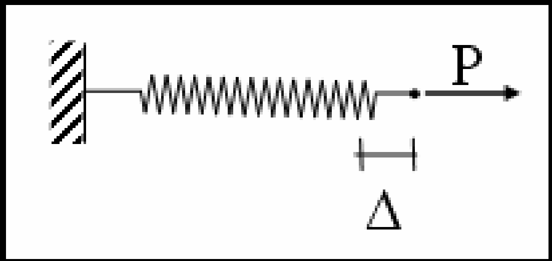
Έργο εξωτερικών δυνάμεων από μετακινήσεις εξαιτίας των ιδίων δυνάμεων, φορτίων και ροπών:

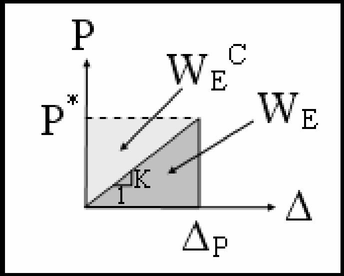
$$W = \frac{1}{2}\sum P_i \cdot \Delta_i + \frac{1}{2}\sum M_i \cdot \phi_i + \frac{1}{2}\int w(x) \cdot \Delta(x)\, dx$$

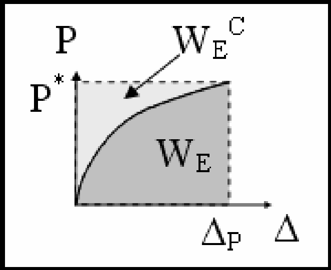
Έργο εξωτερικών δυνάμεων από μετακινήσεις εξαιτίας άλλων δυνάμεων, φορτίων και ροπών:

$$W = \sum P_i \cdot \Delta_i + \sum M_i \cdot \phi_i + \int w(x) \cdot \Delta(x)\, dx$$

Εξωτερικό έργο και συμπληρωματικό εξωτερικό έργο







- γραμμικό υλικό

εξωτερικό έργο:

$$W_E = \int_0^{\Delta_P} P d\Delta = \int_0^{\Delta_P} K \,\Delta \,d\Delta = \frac{1}{2} K \,\Delta_P{}^2$$

συμπληρωματικό εξωτερικό έργο (complimentary external work):

$$W_E^C = \int_0^{P^*} \Delta \,dP = \int_0^{P^*} \frac{P}{K} dP = \frac{1}{2} \frac{P^{*\,2}}{K} = \frac{1}{2} K \,\Delta_P{}^2 = W_E$$

- μη γραμμικό υλικό

εξωτερικό έργο:

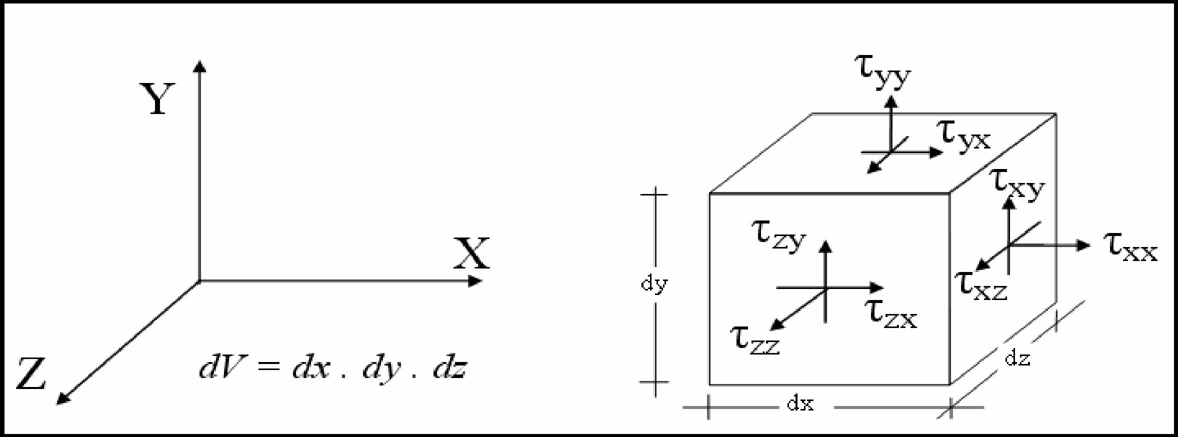
$$W_E = \int_0^{\Delta_P} P d\Delta$$

συμπληρωματικό εξωτερικό έργο:

$$W_C^E = \int_0^{P^*} \Delta \,dP$$

Εσωτερικό έργο (ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης)

- ενέργεια λόγω των τάσεων κατά τις αντίστοιχες παραμορφώσεις
- γενική περίπτωση τρισδιάστατου σώματος
  - απειροστό στοιχείο: $dV = dx \times dy \times dz$ $\Rightarrow$ $dU = \int_0^{\varepsilon} \tau \, d\varepsilon$



- Γραμμικά ελαστικό υλικό: $\tau = E \cdot \varepsilon$

$$dU = \int_0^{\varepsilon} E \cdot \varepsilon \, d\varepsilon = \frac{1}{2} E \cdot \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \tau \cdot \varepsilon \Rightarrow U = \frac{1}{2} \iiint_V \tau \ \varepsilon \ dV$$

Εσωτερικό έργο ορθών και διατμητικών τάσεων

- ελαστική ενέργεια ορθών τάσεων:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \tau_{xx}\ \varepsilon_{xx}\ dV = \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_x\ \varepsilon_x\ dV = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{\tau_{xx}^2}{E}\ dx\ dy\ dz$$

- ελαστική ενέργεια διατμητικών τάσεων:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \tau_{xy}\ \varepsilon_{xy}\ dV = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{G}\ dx\ dy\ dz$$

- παραμορφώσεις με ταυτόχρονη δράση ορθών και διατμητικών τάσεων:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\tau_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}\left(\tau_{yy} + \tau_{zz}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\tau_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E}\left(\tau_{xx} + \tau_{yy}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\tau_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E}\left(\tau_{xx} + \tau_{zz}\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

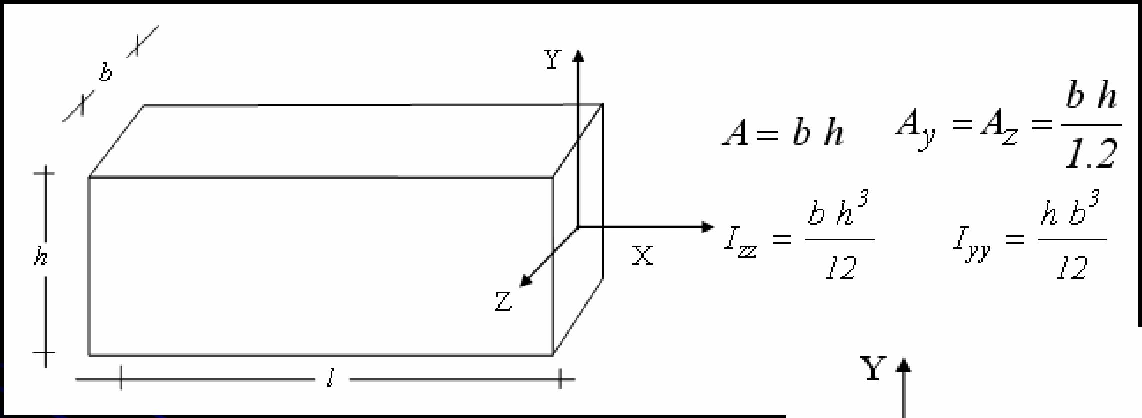
- ελαστική ενέργεια στη γενικευμένη περίπτωση:

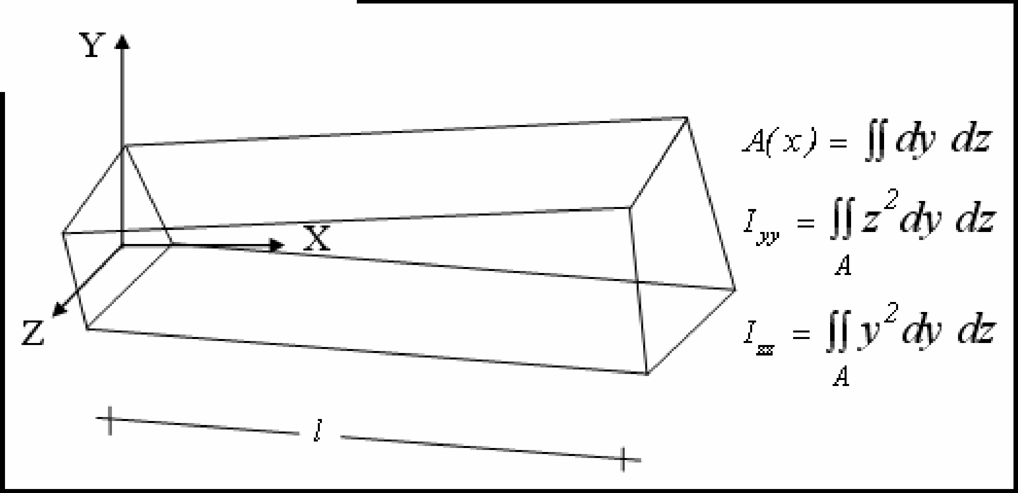
$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \left(\tau_{xx}\ \varepsilon_{xx} + \tau_{yy}\ \varepsilon_{yy} + \tau_{zz}\ \varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\ \gamma_{xy} + \tau_{yz}\ \gamma_{yz} + \tau_{xz}\ \gamma_{xz}\right)\ dV$$

Ελαστική ενέργεια γραμμικών δομικών στοιχείων

- εκφράζοντας τις τάσεις και παραμορφώσεις, κατά τον υπολογισμό της ελαστικής ενέργειας, συναρτήσει των εντατικών μεγεθών

➔ μπορούμε να διατυπώσομε τις επιπλέον εξισώσεις που απαιτούνται για την επίλυση υπερστατικών φορέων





Ελαστική ενέργεια λόγω αξονικών δυνάμεων

- Ελαστική ενέργεια θεωρώντας γραμμικά ελαστικό υλικό:

$$\tau_{xx} = \sigma_x = E\,\varepsilon_{xx}$$

$$\tau_{xx}(x) = \sigma_x = \frac{N(x)}{A(x)}$$

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \tau_{xx}\,\varepsilon_{xx}\,dV = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{\tau_{xx}^{\,2}}{E}\,dV = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{N(x)^2}{A(x)^2 E}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N(x)^2}{A(x)^2 E}\left(\iint_A dy\,dz\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N(x)^2}{A(x)E}\,dx$$

- αν:

$$N(x) = const$$
$$A(x) = const$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{N^2 l}{2AE}}$$

  - αν επιπλέον η διατομή είναι ορθογωνική:

$$U = \frac{N^2 l}{2bhE}$$

- Ελαστική ενέργεια λόγω κάποιου άλλου αιτίου:

(η αξονική δύναμη παραμένει σταθερή κατά την παραμόρφωση)

$$U = \frac{N^2 \cdot l}{A \cdot E}$$

Ελαστική ενέργεια λόγω καμπτικών ροπών M_z ή M_y

- ορθές τάσεις: $\tau_{xx} = \sigma_x = \dfrac{M_z}{I_{zz}}\, y$ $\qquad$ $\tau_{xx} = \sigma_x = \dfrac{M_y}{I_{yy}}\, z$

- γραμμικά ελαστικό υλικό: $\tau_{xx} = \sigma_x = E\,\varepsilon_{xx}$

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \tau_{xx}\,\varepsilon_{xx}\,dV = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{\tau_{xx}^{\,2}}{E}\,dV = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{(M_z\,y)^2}{E\,I_{zz}^{\,2}}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_z^{\,2}}{E\,I_{zz}^{\,2}}\left(\iint_A y^2\,dy\,dz\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_z^{\,2}}{E\,I_{zz}}\,dx$$

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \tau_{xx}\,\varepsilon_{xx}\,dV = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{\tau_{xx}^{\,2}}{E}\,dV = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{(M_y\,z)^2}{E\,I_{yy}^{\,2}}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_y^{\,2}}{E\,I_{yy}^{\,2}}\left(\iint_A z^2\,dy\,dz\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_y^{\,2}}{E\,I_{yy}}\,dx$$

$$\boxed{U_z = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_z^{\,2}}{E\cdot I_z}\,dx} \qquad \boxed{U_y = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_y^{\,2}}{E\cdot I_y}\,dx}$$

- Ελαστική ενέργεια αν η καμπτική ροπή παραμένει σταθερή κατά την καμπτική παραμόρφωση από άλλα αίτια:

$$U_z = \int_0^l \frac{M_z^{\,2}}{E\cdot I_z}\,dx \qquad U_y = \int_0^l \frac{M_y^{\,2}}{E\cdot I_y}\,dx$$

Ελαστική ενέργεια λόγω τεμνουσών δυνάμεων V_y ή V_z

→ διατμητικές τάσεις: $\tau_{xy} = \dfrac{V_y\, S_y}{I_{zz}\, b}$ $\quad \tau_{xz} = \dfrac{V_z\, S_z}{I_{yy}\, h}$

- γραμμικά ελαστικό υλικό: → $\gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G}$ $\quad \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G}$ $\quad \boxed{G = \dfrac{E}{2\cdot(1+\nu)}}$

$$U_y = \frac{1}{2}\iiint_V \tau_{xy}\,\gamma_{xy}\,dV = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{(V_y\, S_y)^2}{G\,(I_{zz}\, b)^2}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{V_y^{\,2}}{G\,I_{zz}^{\,2}}\left(\iint_A \left(\frac{S_y}{b}\right)^2 dy\,dz\right)dx$$

$$U_z = \frac{1}{2}\iiint_V \tau_{xz}\,\gamma_{xz}\,dV = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{(V_z\, S_z)^2}{G\,(I_{yy}\, b)^2}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{V_z^{\,2}}{G\,I_{yy}^{\,2}}\left(\iint_A \left(\frac{S_z}{h}\right)^2 dy\,dz\right)dx$$

$A_y = \dfrac{A}{k_y}$ → $\boxed{U_y = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \dfrac{V_y^{\,2}}{G\cdot A_y}\,dx}$ $\qquad A_z = \dfrac{A}{k_z}$ → $\boxed{U_z = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \dfrac{V_z^{\,2}}{G\cdot A_z}\,dx}$

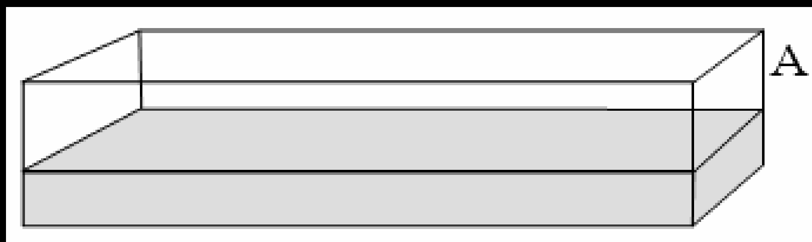
- αν οι τέμνουσες δυνάμεις δεν μεταβάλλονται κατά την παραμόρφωση από άλλα αίτια: $U_y = \displaystyle\int_0^l \dfrac{V_y^{\,2}}{G\cdot A_y}\,dx$ $\quad U_z = \displaystyle\int_0^l \dfrac{V_z^{\,2}}{G\cdot A_z}\,dx$

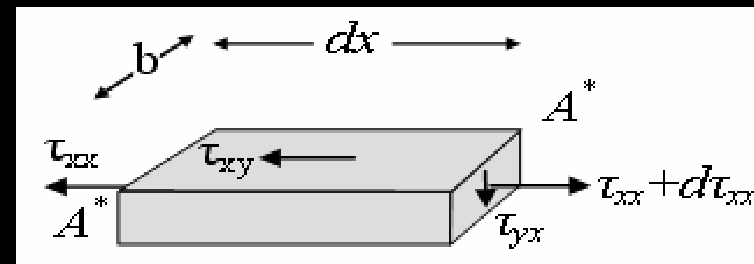
Συντελεστές σχήματος k_y ή k_z

$$A_y = \frac{A}{k_y}$$

$$A_z = \frac{A}{k_z}$$

K_y, k_z: συντελεστές σχήματος
(ορθογωνικές διατομές: $k_y = k_z = 1.2$)





ισορροπία απειροστής φέττας μήκους dx:

$$dx \cdot \tau_{xy} \cdot b + \int_A \tau_{xx} \, dA = \int_A (\tau_{xx} + d\tau_{xx}) \, dA \quad \Rightarrow \quad dx \cdot \tau_{xy} \cdot b = \int_A d\tau_{xx} \, dA$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\tau_{xx} = \frac{M_z}{I_{zz}} y \quad \Rightarrow \quad d\tau_{xx} = \frac{dM_z}{I_{zz}} y \qquad V_y = \frac{dM_z}{dx}$$

$$dx \cdot \tau_{xy} \cdot b = \int_A \frac{dM_z}{I_{zz}} y \, dA \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \int_A \frac{V_y}{I_{zz} \cdot b} y \, dA = \frac{V_y}{I_{zz} \cdot b} \int_A y \, dA$$

διατμητικές τάσεις: $\boxed{\tau_{xy} = \frac{V_y \cdot S_y}{I_{zz} \cdot b}}$

στατική ροπή αδρανείας: $S_y = \int_A y \; dA$

για ορθογωνικές διατομές:
(παραβολική μεταβολή τάσεων)

$$S_y = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right)$$

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \tau_{xy}\,\gamma_{xy}\,dV = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{\left(V_y\; S_y\right)^2}{G\;\left(I_{zz}\;b\right)^2}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_l \int_0^l \frac{V_y^{\;2}\;b}{G\left(\frac{bh^3}{12}\right)^2 b^2} \cdot \left(\frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right)\right)^2 dy\,dx$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{V_y^{\;2}}{G\frac{b^2h^6}{144}b} \cdot \left(\frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_l \int_0^l \frac{36\,V_y^{\;2}}{G\,b^2h^6} \cdot b \cdot \left(\frac{h^4}{16} - y^2\,\frac{h^2}{2} + y^4\right) dy\,dx$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{36V_y^{\;2}}{G\,b\,h^6} \cdot \left(\frac{y\,h^4}{16} - \frac{y^3h^2}{6} + \frac{y^5}{5}\right)_{-h/2}^{h/2} dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{36V_y^{\;2}}{G\,b\,h^6} \cdot \left(\frac{h^5}{16} - \frac{h^5}{24} + \frac{h^5}{80}\right) dx$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{36V_y^{\;2}}{G\,b\,h^6} \cdot \left(\frac{h^5}{30}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{1.2V_y^{\;2}}{G\,b\,h}\,dx = \frac{1}{2}\int_L \frac{1.2V_y^{\;2}}{G\;A}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{V_y^{\;2}}{G\;A_y}\,dx \Rightarrow A_y = \frac{b\;h}{1.2}$$

Ελαστική ενέργεια λόγω ροπών στρέψης M_x

διατμητικές τάσεις:
(λόγω ροπής στρέψης)

$$\tau = \frac{M_x r}{J}$$

γραμμικά ελαστικό υλικό (Hooke's law):

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \tau_r \gamma_r \, dV = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{M_x^2}{G\,J^2} r^2 \, dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_x^2}{G J^2}\left(\iint_A r^2 dy\,dz\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_x^2}{G\,J}\,dx$$

πολική ροπή αδράνειας:

$$J = \iint_A r^2 dy\,dz$$

r : απόσταση από το κέντρο της διατομής

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_x^2}{G \cdot J}\,dx}$$

- Ελαστική ενέργεια αν η ροπή στρέψης παραμένει σταθερή κατά την στρεπτική παραμόρφωση από άλλα αίτια:

$$\boxed{U = \int_0^l \frac{M_x^2}{G \cdot J}\,dx}$$

Συνολική ελαστική ενέργεια (εσωτερικό έργο)

- γενική περίπτωση γραμμικών μελών έχοντας περισσότερες από μια μορφές παραμόρφωσης, εφόσον οι παραμορφώσεις προκαλούνται από τις αντίστοιχες δυνάμεις και ροπές οι οποίες μεταβάλλονται γραμμικά με τις παραμορφώσεις:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \left(N\left(\frac{N}{AE}\right) + V_y\left(\frac{V_y}{GA_y}\right) + V_z\left(\frac{V_z}{GA_z}\right) + T\left(\frac{T}{GJ}\right) + M_y\left(\frac{M_y}{EI_y}\right) + M_z\left(\frac{M_z}{EI_z}\right)\right) dx$$

- Ελαστική ενέργεια λόγω κάποιου άλλου αιτίου:
  (όταν τα εντατικά μεγέθη παραμένουν σταθερά κατά την παραμόρφωση)

$$U = \int_0^L \left(N\left(\frac{N}{AE}\right) + V_y\left(\frac{V_y}{GA_y}\right) + V_z\left(\frac{V_z}{GA_z}\right) + T\left(\frac{T}{GJ}\right) + M_y\left(\frac{M_y}{EI_y}\right) + M_z\left(\frac{M_z}{EI_z}\right)\right) dx$$

Αρχή διατήρησης της ενέργειας (πραγματικό έργο)

- εξωτερικό έργο W_E:
  - έργο λόγω μετακίνησεων των σημείων εφαρμογής των εξωτερικών φορτίων
- εσωτερικό έργο W_I, ή ελαστική ενέργεια U παραμόρφωσης:
  - ελαστική ενέργεια που 'αποθηκεύεται' υπό μορφή τάσεων και παραμορφώσεων

αρχή διατήρησης της ενέργειας:

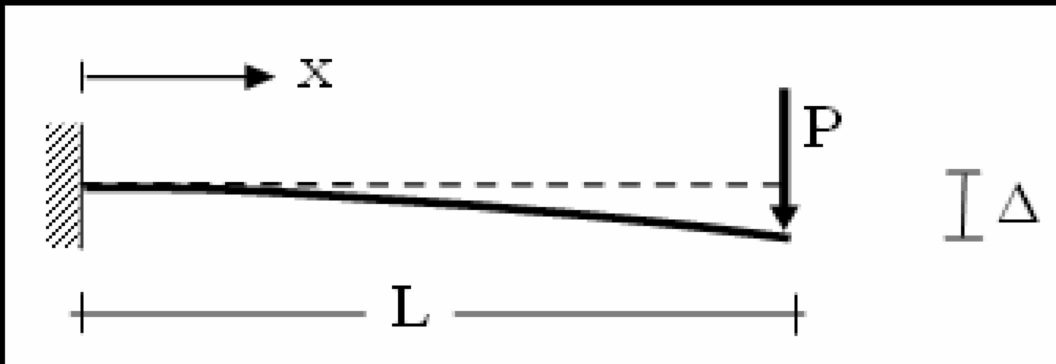
$$\boxed{W_E = U}$$

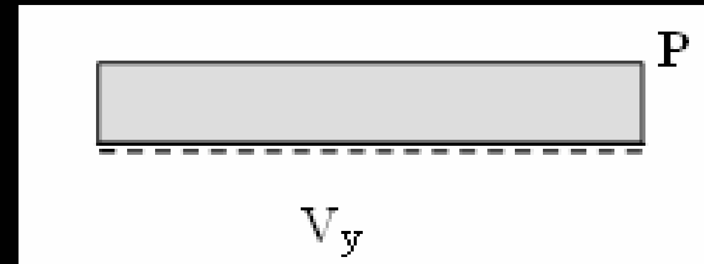
το εξωτερικό έργο W_E λόγω εξωτερικών φορτίων πρέπει να ισούται με την ελαστική ενέργεια U του φορέα λόγω των προκαλούμενων τάσεων και παραμορφώσεων ώστε να διατηρείται η συνολική ενέργεια του συστήματος:

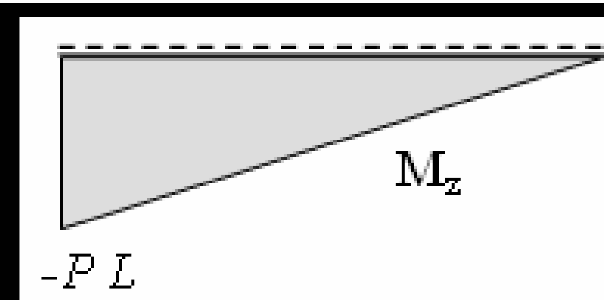
θεωρώντας ότι:

- τα φορτία ασκούνται τόσο αργά ώστε να μην προκαλείται κινητική ή θερμοκρασιακή ενέργεια
- όλο το έργο το οποίο κάνουν οι εξωτερικές δυνάμεις και ροπές αποθηκεύεται υπό μορφή ελαστικής ενέργειας στα μέλη της κατασκευής τα οποία παραμορφώνονται αντίστοιχα
- δεν υπάρχει τρόπος απορρόφησης της ενέργειας στο σύστημα

Παράδειγμα εφαρμογής της αρχής διατήρησης της ενέργειας







- εξωτερικό έργο: $$W_E = \frac{1}{2} P \Delta$$

- εσωτερικό έργο (ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης):

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \left(V_y \left(\frac{V_y}{G A_y}\right) + M_z \left(\frac{M_z}{E I_z}\right)\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{V_y(x)^2}{G A_y} + \frac{M_z(x)^2}{E I_z}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{P^2}{G A_y} + \frac{P^2 (L-x)^2}{E I_z}\right) dx$$

$$U = \frac{1}{2}\left\{\frac{P^2 x}{G A_y} + \frac{x P^2 L^2}{E I_z} + \frac{x^3 P^2}{3 E I_z} - \frac{x^2 P^2 L}{E I_z}\right\}_0^L = \frac{1}{2}\left(\frac{P^2 L}{G A_y} + \frac{P^2 L^3}{E I_z} + \frac{P^2 L^3}{3 E I_z} - \frac{P^2 L^3}{E I_z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{P^2 L}{G A_y} + \frac{P^2 L^3}{3 E I_z}\right)$$

- **αρχή διατήρησης της ενέργειας:** $\boxed{W_E = U}$

$$\frac{1}{2} P\,\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{P^2 L}{G A_y} + \frac{P^2 L^3}{3 E I_z}\right) \rightarrow \Delta = \frac{P L}{G A_y} + \frac{P L^3}{3 E I_z}$$

- Χρησιμοποιώντας κάποιες λογικές τιμές για τα διάφορα μεγέθη και παραμέτρους:

$b = 0.25 m$, $h = 0.50 m$

$L = 5\,m$

$P_1 = 10{,}000 N = 10 KN$

$E = 25 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} = 25 GPA$

$G = 10 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} = 10 GPA$

$$A_y = \frac{b \cdot h}{1.2} = \frac{0.25\ 0.50}{1.2} = 0.10417\ m^2$$

$$I_z = \frac{b\ h^3}{12} = \frac{0.25\ \ 0.50^3}{12} = 0.00260\ m^4$$

$$\Delta = \frac{10KN \cdot 5m}{10GPa\ \cdot 0.10417\,m^2} + \frac{10KN \cdot (5m)^3}{3 \cdot 25GPa\ \cdot 0.00260\,m^3} = 0.000048\,m + 0.0064\,m = 0.006448\,m = 0.006\,m$$

Θεωρήματα Castigliano

Το εξωτερικό έργο είναι μια συνάρτηση των εξωτερικών φορτίων και έτσι αν ένα φορτίο μεταβληθεί, τόσο το εξωτερικό W_E όσο και το εσωτερικό W_I έργο, πρέπει να αλλάξουν, ώστε να συνεχίσει να ισχύει η αρχή της διατήρησης της ενέργειας

$$W_E = f(P_i, M_i, w_i)$$

$$\Downarrow$$

$$W_E + dW_E = W_I + dW_I$$

$$W_E{}^c + dW_E{}^c = W_I{}^c + dW_I{}^c$$

1ο θεώρημα Castigliano

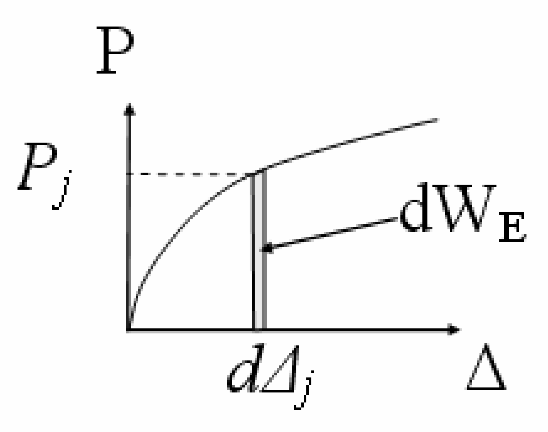
μεταβάλλοντας το σημείο εφαρμογής ενός φορτίου P_j κατά $d\Delta_j$:

➡ το εξωτερικό έργο μεταβάλλεται κατά: $$dW_E \approx P_j \cdot d\Delta_j$$

➡ η ελαστική ενέργεια αλλάζει κατά: $$dW_I = dU = \frac{\partial U}{\partial \Delta_j} \cdot d\Delta_j$$

$$W_E + dW_E = W_I + dW_I$$

$$\boxed{P_j = \frac{\partial U}{\partial \Delta_j}}$$



'Η μερική παράγωγος της ελαστικής ενέργειας ως προς τη μετακίνηση η οποία αντιστοιχεί σε ένα από τα εξωτερικά φορτία (συγκεντρωμένη δύναμη ή ροπή) ισούται με το συγκεκριμένο φορτίο.'

2ο θεώρημα Castigliano

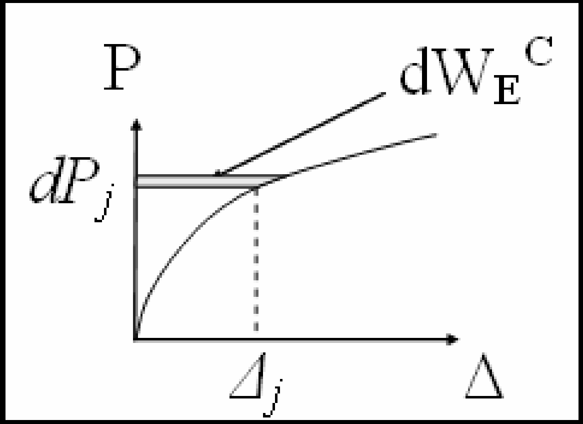
μεταβάλλοντας ένα φορτίο P_j κατά dP_j:

- το εξωτερικό συμπληρωματικό έργο μεταβάλλεται κατά: $dW_E{}^c \approx \Delta_j \cdot dP_j$

- η συμπληρωματική ελαστική ενέργεια αλλάζει κατά: $dU^c = \dfrac{\partial U^c}{\partial P_j} \cdot dP_j$

$$W_E{}^c + dW_E{}^c = W_I{}^c + dW_I{}^c$$

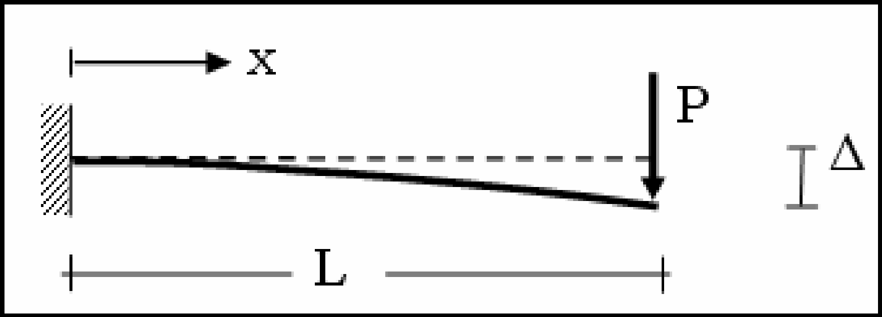
$$\boxed{\Delta_j = \frac{\partial U}{\partial P_j}}$$



‘Η μερική παράγωγος της συμπληρωματικής ελαστικής ενέργειας ως προς οποιοδήποτε από τα εξωτερικά φορτία (συγκεντρωμένη δύναμη ή ροπή) ισούται με τη μετακίνηση στο σημείο εφαρμογής και στη διεύθυνση του συγκεκριμένου φορτίου.’

Υπολογισμός μετακινήσεων με το 2ο θεώρημα Castigliano

- υπολογισμός βύθισης του άκρου προβόλου λόγω δύναμης P_1:



➡ πρέπει να πάρομε τη μερική παράγωγο του εσωτερικού έργου ως προς τη δύναμη P_1

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1}\left(\frac{1}{2}\int_0^L\left(V_y\left(\frac{V_y}{G\,A_y}\right) + M_z\left(\frac{M_z}{E\,I_z}\right)\right)dx\right) = \int_0^L\left(\frac{\partial V_y}{\partial P_1}\left(\frac{V_y}{G\,A_y}\right) + \frac{\partial M_z}{\partial P_1}\left(\frac{M_z}{E\,I_z}\right)\right)dx$$

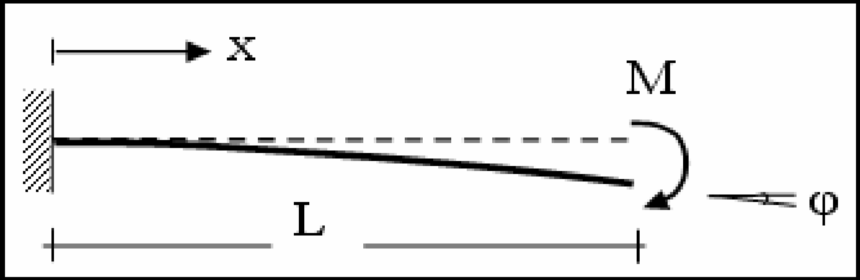
$$V_y = P_1 \Rightarrow \frac{\partial V_y}{\partial P_1} = 1$$

$$M_z = -P_1\cdot(L-x) \Rightarrow \frac{\partial M_z}{\partial P_1} = -(L-x)$$

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P_1} = \int_0^L\left(\left(\frac{V_y}{G\cdot A_y}\right) + (L-x)\cdot\left(\frac{M_z}{E\cdot I_z}\right)\right)dx = \int_0^L\left(\frac{P}{G\cdot A_y} + \frac{P\cdot(L-x)^2}{E\cdot I_z}\right)dx = \frac{P\cdot L}{G\cdot A_y} + \frac{P\cdot L^3}{3\cdot E\cdot I_z}$$

Υπολογισμός μετακινήσεων με το 2ο θεώρημα Castigliano

- υπολογισμός στροφής του άκρου προβόλου λόγω δύναμης P_1 :



➡ πρέπει να πάρομε τη μερική παράγωγο του εσωτερικού έργου ως προς τη ροπή M_1

$$M_z = -P_1 \cdot (L - x) - M_1$$

➡

$$\frac{\partial M_z}{\partial M_1} = -1$$

(εφαρμογή μηδενικής ροπής M_1, για να είναι δυνατή η χρήση του 2ου θεωρήματος του Castigliano)

$$\frac{\partial U}{\partial M_1} = \frac{\partial}{\partial M_1}\left(\frac{1}{2}\int_0^L \left(M_z \frac{M_z}{EI_z}\right) dx\right) = \int_0^L \left(\frac{\partial M_z}{\partial M_1} \frac{M_z}{EI_z}\right) dx$$

➡

$$\frac{\partial U}{\partial M_1} = \int_0^L \frac{P_1 \cdot (L - x) + M_1}{EI_z} dx = \left\{\frac{P_1 \cdot (L - x)^2}{2 \cdot EI_z} + \frac{x \cdot M_1}{EI_z}\right\}_0^L$$

➡

$$\frac{\partial U}{\partial M_1} = \frac{L \cdot M_1}{EI_z} - \frac{P_1 \cdot L^2}{2 \cdot EI_z}$$

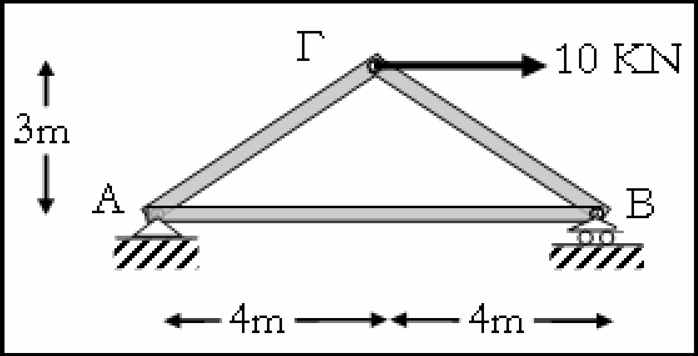
$$\varphi = \left.\frac{\partial U}{\partial M_1}\right|_{M_1 = 0}$$

➡

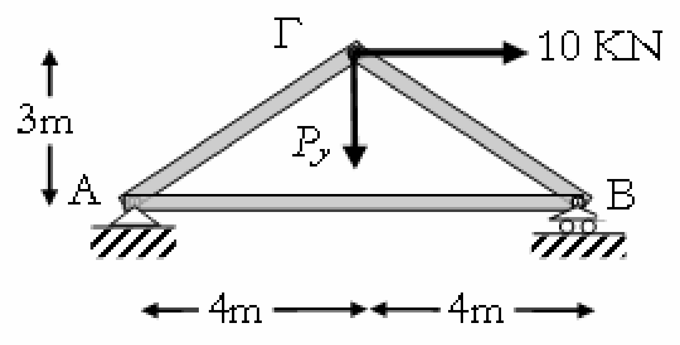
$$\varphi = \left.\frac{\partial U}{\partial M_1}\right|_{M_1 = 0} = \left.\frac{L \cdot M_1}{EI_z} - \frac{P_1 \cdot L^2}{2 \cdot EI_z}\right|_{M_1 = 0} = -\frac{P_1 \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I_z}$$

Παράδειγμα υπολογισμού μετακινήσεων δικτυώματος

- *υπολογισμός βύθισης κόμβου Γ χρησιμοποιώντας το 2ο θεώρημα του Castigliano:*

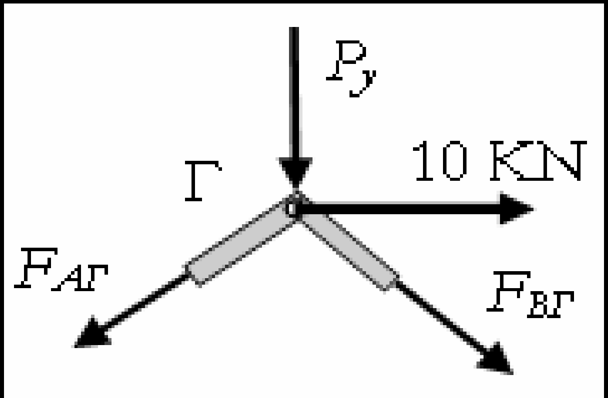


➡ *εφαρμογή δύναμης P_y στη διεύθυνση της ζητούμενης βύθισης ώστε να είναι δυνατή η μερική παραγώγιση ως προς τη δύναμη αυτή για να υπολογισθεί η ζητούμενη βύθιση:*



$$\Delta_y^{\Gamma} = \left.\frac{\partial U}{\partial P_y}\right|_{P_y=0}$$

- *εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας στον κόμβο Γ:*



$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{5} \cdot F_{A\Gamma} + \frac{3}{5} \cdot F_{B\Gamma} = -P_y$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5} \cdot F_{A\Gamma} = 10,000 + \frac{4}{5} \cdot F_{B\Gamma}$$

$$\Rightarrow \quad F_{A\Gamma} = 12,500 + F_{B\Gamma}$$

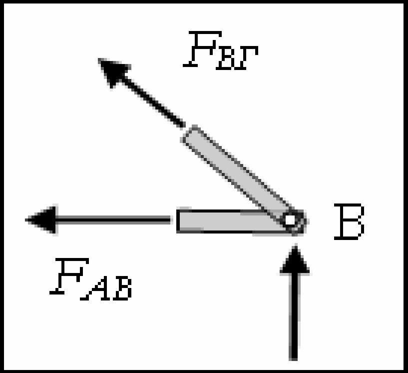
$$\Rightarrow \quad \frac{3}{5} \cdot \left(12,500 + F_{B\Gamma}\right) + \frac{3}{5} \cdot F_{B\Gamma} = -P_y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6}{5} \cdot F_{B\Gamma} = -P_y - 7,500$$

$$\boxed{F_{A\Gamma} = 6,250 - \frac{5}{6} \cdot P_y}$$

$$\boxed{F_{B\Gamma} = -6,250 - \frac{5}{6} \cdot P_y}$$

- *εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας στον κόμβο Β:*



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = -\frac{4}{5} \cdot F_{B\Gamma} = -\frac{4}{5} \cdot \left(-6{,}250 - \frac{5}{6} \cdot P_y \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_{AB} = 5{,}000 + \frac{2}{3} \cdot P_y}$$

- *για να βρούμε τη βύθιση στον κόμβο Γ πρέπει να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο:*

$$\frac{\partial U}{\partial P_y} = F_{A\Gamma} \cdot \frac{\partial F_{A\Gamma}}{\partial P_y} \cdot \frac{L_{A\Gamma}}{A_{A\Gamma} \cdot E_{A\Gamma}} + F_{B\Gamma} \cdot \frac{\partial F_{B\Gamma}}{\partial P_y} \cdot \frac{L_{B\Gamma}}{A_{B\Gamma} \cdot E_{B\Gamma}} + F_{AB} \cdot \frac{\partial F_{AB}}{\partial P_y} \cdot \frac{L_{AB}}{A_{AB} \cdot E_{AB}}$$

$$F_{A\Gamma} = 6,250 - \frac{5}{6} \cdot P_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_{A\Gamma}}{\partial P_y} = -\frac{5}{6}$$

$$F_{B\Gamma} = -6,250 - \frac{5}{6} \cdot P_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_{B\Gamma}}{\partial P_y} = -\frac{5}{6}$$

$$F_{AB} = 5,000 + \frac{2}{3} \cdot P_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_{AB}}{\partial P_y} = \frac{2}{3}$$

- *γεωμετρικά και μηχανικά χαρακτηριστικά ράβδων:*

$$L_{A\Gamma} = 5m\,, \qquad A_{A\Gamma} = 500\,mm^2\,, \qquad E_{A\Gamma} = E = 200\,GPA$$

$$L_{B\Gamma} = 5m\,, \qquad A_{B\Gamma} = 500\,mm^2\,, \qquad E_{B\Gamma} = E = 200\,GPA$$

$$L_{AB} = 8m\,, \qquad A_{AB} = 400\,mm^2\,, \qquad E_{AB} = E = 200\,GPA$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial P_y} = \left(6,250 - \frac{5}{6}\cdot P_y\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{5}{\left(500\cdot 10^{-3}\right)\cdot\left(200\cdot 10^{9}\right)}$$

$$+\left(-6,250 - \frac{5}{6}\cdot P_y\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{5}{\left(500\cdot 10^{-3}\right)\cdot\left(200\cdot 10^{9}\right)} + \left(5,000 + \frac{2}{3}\cdot P_y\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{5}{\left(400\cdot 10^{-3}\right)\cdot\left(200\cdot 10^{9}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_y^C = \left.\frac{\partial U}{\partial P_y}\right|_{P_y=0} = (6,250)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{5}{\left(500\cdot 10^{-3}\right)\cdot\left(200\cdot 10^{9}\right)}$$

$$+(-6,250)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{5}{\left(500\cdot 10^{-3}\right)\cdot\left(200\cdot 10^{9}\right)} + (5,000)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{8}{\left(400\cdot 10^{-3}\right)\cdot\left(200\cdot 10^{9}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_y^C = \left.\frac{\partial U}{\partial P_y}\right|_{P_y=0} = (6,250)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{5}{\left(500\cdot 10^{-3}\right)\cdot\left(200\cdot 10^{9}\right)}$$

$$+(-6,250)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{5}{\left(500\cdot 10^{-3}\right)\cdot\left(200\cdot 10^{9}\right)}+(5,000)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{8}{\left(400\cdot 10^{-3}\right)\cdot\left(200\cdot 10^{9}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_y^{\Gamma} = \left.\frac{\partial U}{\partial P_y}\right|_{P_y=0} = 3.33\cdot 10^{-4}\, m = 0.333\, mm$$