ΠΠΜ 220: Στατική Ανάλυση των Κατασκευών Ι

Διαλέξεις 24-27

Αρχή Δυνατών Έργων (ΑΔΕ)

Τρίτη, 2, Τετάρτη, 3, Παρασκευή 5
και Τρίτη, 9 Νοεμβρίου , 2004

Πέτρος Κωμοδρόμος
komodromos@ucy.ac.cy
http://www.ucy.ac.cy/~petrosk

Θέματα

- Εισαγωγή στην αρχή των δυνατών έργων (ΑΔΕ)
  - Αρχή των δυνατών έργων
  - Αρχή των δυνατών συμπληρωματικών έργων
- Εξωτερικό δυνατό έργο
- Εσωτερικό δυνατό έργο (ελαστική δυνατή ενέργεια)
  - αξονικές παραμορφώσεις
  - καμπτικές παραμορφώσεις
  - διατμητικές παραμορφώσεις
  - στρεπτικές παραμορφώσεις
  - συνολική ελαστική δυνατή ενέργεια
- Υπολογισμός μετακινήσεων με την ΑΔΕ
- Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων μορφής
- Μη πρισματικά μέλη
- Παραμορφώσεις από άλλα, εκτός φορτίων, αίτια
  - Θερμοκρασιακές μεταβολές
  - Κατασκευαστικές ατέλειες και σφάλματα
  - Διαφορικές καθιζήσεις

Χρησιμότητα υπολογισμού παραμορφώσεων και μετακινήσεων

- Έλεγχοι
  - *ασφάλειας*
    - εντατικών μεγεθών σε σχέση με τις επιτρεπόμενες αντοχές
  - *λειτουργικότητας*
    - διασφαλίζονται λειτουργικές ανάγκες μιας κατασκευής

    (π.χ. έλεγχος παραμορφώσεων και μετακινήσεων)

  ⇨ αναγκαίος ο υπολογισμός των παραμορφώσεων και μετακινήσεων ενός φορέα κάτω από την επίδραση κάποιων συγκεκριμένων δράσεων ή συνδυασμών δράσεων για σκοπούς *ελέγχου λειτουργικότητας*

- Επίσης, απαραίτητος είναι ο υπολογισμός των μετακινήσεων κατά την επίλυση υπερστατικών φορέων για την οποία δεν αρκούν οι εξισώσεις ισορροπίας

  ⇨ οι επιπλέον εξισώσεις προκύπτουν από την διατύπωση της συμβιβαστότητας των παραμορφώσεων και μετακινήσεων του φορέα

Συνήθης παραδοχές

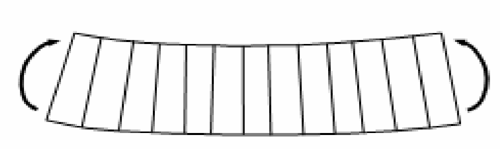
- μικρές παραμορφώσεις και μετακινήσεις σε σχέση με τις διαστάσεις

  ⇨ χρήση αρχικής απαραμόρφωτης γεωμετρία και μορφής του φορέα

- γραμμική-ελαστική συμπεριφορά του υλικού

$$\boxed{\tau = E \cdot \varepsilon}$$

  - γραμμική συμπεριφορά: οι τάσεις είναι ανάλογες των παραμορφώσεων
  - ελαστική συμπεριφορά: αν αφαιρεθούν όλα τα φορτία από τον φορέα τότε αυτός θα επιστρέψει στην αρχική αφόρτιστη θέση και γεωμετρία του χωρίς παραμένουσες παραμορφώσεις



- αρχή της επαλληλίας.
- αρχή της επιπεδότητας των διατομών (Bernoulli)
  - Για γραμμικά μέλη υπό καμπτικές παραμορφώσεις θεωρείται ότι επίπεδες διατομές που είναι κάθετες στον άξονα ενός μέλους παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα ενός μέλους μετά την παραμόρφωση

  ⇨ έτσι, έχοντας γραμμικά ελαστικό υλικό, υπάρχει μια γραμμική μεταβολή των ορθών τάσεων μεταξύ των ακραίων ινών στα πέλματα ενός μέλους

Γεωμετρικές μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων

- *γεωμετρικές μέθοδοι:*
  - βασίζονται, είτε άμεσα είτε έμμεσα, στην διαφορική εξίσωση (ΔΕ) που συνδέει την καμπτική ροπή με την καμπυλότητα
  - χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό βυθίσεων και στροφών απλών φορέων λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις καμπτικές παραμορφώσεις
  - κύριες γεωμετρικές μέθοδοι:
    - μέθοδος διπλής ολοκλήρωσης (*double integration method*)
    - μέθοδος ροπών (*moment-area method*)
    - μέθοδος ομόλογης δοκού (*conjugate beam method*)
  - παρουσιάζουν σημαντικά μειονεκτήματα ειδικά για την συστηματική γενική ανάλυση πολύπλοκων φορέων.

Ενεργειακές μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων

- βασίζονται στο ισοζύγιο εξωτερικού και εσωτερικού έργου
  - *εξωτερικό έργο (external work)*: το έργο που παράγεται από τα εξωτερικά φορτία κατά τη μετακίνηση τους λόγω παραμορφώσεων του φορέα
  - *εσωτερικό έργο (internal work)* ή αλλιώς *ελαστική ενέργεια (elastic strain energy)*: η ενέργεια, ή το εσωτερικό έργο, η οποία αποθηκεύεται στο υλικό λόγω τάσεων και παραμορφώσεων

- κύριες ενεργειακές μέθοδοι:
  - *αρχή διατήρησης της ενέργειας* (πραγματικό έργο)
    - μία άγνωστη μετακίνηση μόνο μπορεί να υπολογιστεί αφού μόνο μια εξίσωση υπάρχει για το ισοζύγιο εξωτερικού και εσωτερικού έργου
    - μόνο μετακινήσεις στο σημείο και διεύθυνση ενός συγκεντρωμένου φορτίου μπορούν να υπολογιστούν
  - *θεωρήματα Castigliano*
    - μόνο μετακινήσεις στο σημείο και διεύθυνση ενός συγκεντρωμένου φορτίου μπορούν να υπολογιστούν, αφού προσδιοριστούν οι αντίστοιχες μερικές παράγωγοι ως προς τα αντίστοιχα συγκεντρωμένα φορτία
  - *αρχή των δυνατών έργων* (ΑΔΕ)

Εισαγωγή στην αρχή των δυνατών έργων (ΑΔΕ)

- αποτελεί τη βάση για τον υπολογισμό των μετακινήσεων και τη συστηματική ανάλυση οποιασδήποτε κατασκευής
- η πιο σημαντική διαδικασία υπολογισμού των μετακινήσεων ενός συγκεκριμένου σημείου ενός φορέα αφού:
  - είναι εφαρμόσιμη σε διαφορετικά είδη κατασκευών
  - έχει δυνατότητες συμπερίληψης, πέρα από τα συνήθη φορτία, άλλων δράσεων, όπως υποχωρήσεις στηρίξεων, θερμοκρασιακές μεταβολές και κατασκευαστικά ατέλειες
- βασίζεται στο ισοζύγιο του *εξωτερικού δυνατού έργου* με το *εσωτερικό δυνατό έργο*, δηλαδή την *ελαστική δυνατή ενέργεια*

Αρχή των δυνατών έργων (ΑΔΕ)

- εάν μία κατασκευή, η οποία βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση, υποβληθεί σε μια επιπλέον νοητή (δυνατή) φόρτιση, ή μετακίνηση, θα αναπτυχθούν επιπλέον εντατικά μεγέθη και τάσεις καθώς και θα προκύψουν επιπλέον παραμορφώσεις και μετακινήσεις

- σύμφωνα με την ΑΔΕ:

το εξωτερικό δυνατό έργο και το εσωτερικό δυνατό έργο πρέπει να είναι ίσα ώστε να διατηρείται η συνολική ενέργεια του συστήματος

$$\boxed{\delta W_E = \delta W_I = \delta U}$$

Εναλλακτικές διατυπώσεις της ΑΔΕ

- *αρχή των δυνατών μετακινήσεων*:

προκύπτει από εφαρμογή δυνατών μετακινήσεων και το ισοζύγιο του εξωτερικού και εσωτερικού δυνατού έργου.

⇨ *μέθοδοι των μετακινήσεων*

- *αρχή των δυνατών* δυνάμεων:

προκύπτει από εφαρμογή δυνατών δυνάμεων και το ισοζύγιο του εξωτερικού και εσωτερικού συμπληρωματικού δυνατού έργου.

⇨ *μέθοδοι των δυνάμεων*

Αρχή των δυνατών έργων
- Αρχή των δυνατών μετακινήσεων

- εφαρμογή δυνατών μετακινήσεων και παραμορφώσεων
  - εφαρμογή σε ένα φορέα, ο οποίος ισορροπεί κάτω από εξωτερικά επιβαλλόμενες (πραγματικές) φορτίσεις, δυνατών ('φανταστικών') μετακινήσεων, οι οποίες είναι συμβατές με τις συνθήκες στήριξης και εσωτερικές συνδέσεις του φορέα

- ισοζύγιο του εξωτερικού και εσωτερικού δυνατού έργου:
  - το εξωτερικό δυνατό έργο, από την δυνατή μετακίνηση των πραγματικών φορτίσεων, πρέπει να ισούται με την ελαστική δυνατή ενέργεια, την οποία πραγματοποιούν οι τάσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στα προκαλούμενα από τα πραγματικά φορτία εσωτερικά εντατικά μεγέθη, κατά τις δυνατές παραμορφώσεις.

$$\boxed{\delta W_E = \delta W_I}$$

Αρχή των δυνατών συμπληρωματικών έργων - Αρχή των δυνατών δυνάμεων

- εφαρμογή δυνατών δυνάμεων και ροπών
  - εφαρμόζουμε σε ένα φορέα, ο οποίος ισορροπεί κάτω από εξωτερικά επιβαλλόμενες φορτίσεις, μια δυνατή εξωτερική φόρτιση και τα αντίστοιχα δυνατά εσωτερικά εντατικά μεγέθη
- ισοζύγιο του εξωτερικού και εσωτερικού συμπληρωματικού δυνατού έργου:

$$\boxed{\delta W_E^{\,c} = \delta W_I^{\,c}}$$

  - το εξωτερικό δυνατό συμπληρωματικό έργο, από την μετακίνηση των δυνατών φορτίσεων κατά τις πραγματικές μετακινήσεις, πρέπει να ισούται με την ελαστική δυνατή συμπληρωματική ενέργεια, την οποία πραγματοποιούν οι τάσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στα προκαλούμενα από τα δυνατά φορτία εσωτερικά εντατικά μεγέθη, κατά τις πραγματικές παραμορφώσεις.

⇨ μπορούμε να υπολογίσομε μία άγνωστη μετακίνηση εφαρμόζοντας μια δυνατή φανταστική δύναμη, ή ροπή, όπου ζητείται ο υπολογισμός της.

Εξωτερικό δυνατό έργο δW_E

- επιβάλλοντας σε ένα φορέα, ο οποίος ισορροπεί κάτω από την εφαρμογή εξωτερικών φορτίων, μια δυνατή μετακίνηση, η οποία δεν παραβιάζει τις συνθήκες στήριξης ή εσωτερικών συνδέσεων:

⇨ τα επιβαλλόμενα φορτία εκτελούν εξωτερικό δυνατό έργο

  - το εξωτερικό δυνατό έργο δW_E ισούται με το γινόμενο πραγματικών δυνάμεων ή ροπών επί τις αντίστοιχες δυνατές (νοητές) μετακινήσεις του σημείου εφαρμογής.

  - θετικό είναι το δυνατό έργο όταν η δύναμη ή ροπή και η δυνατή μετάθεση ή στροφή, αντίστοιχα, είναι στην ίδια διεύθυνση. Αλλιώς, αν είναι αντίθετης φοράς, είναι αρνητικό το έργο.

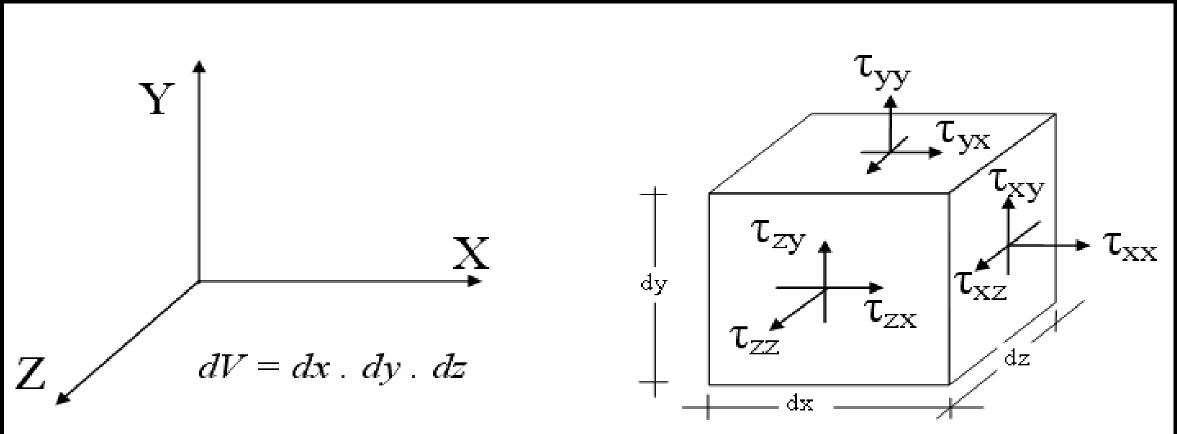
⇨ το εξωτερικό δυνατό έργο εξωτερικών φορτίων από την επιβολή αντίστοιχων δυνατών μετακινήσεων ισούται με:

$$\boxed{\delta W_E = \sum P_i \cdot \delta\Delta_i + \sum M_i \cdot \delta\phi_i + \int w(x) \cdot \delta\Delta(x)\, dx}$$

Εσωτερικό δυνατό έργο
(ελαστική δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης)

- ενέργεια λόγω των τάσεων κατά τις αντίστοιχες δυνατές παραμορφώσεις

- γενική περίπτωση τρισδιάστατου σώματος

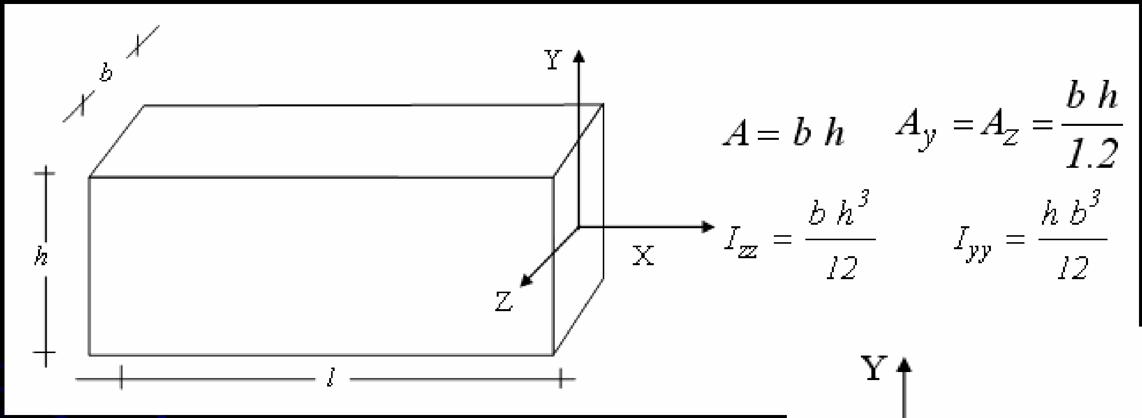


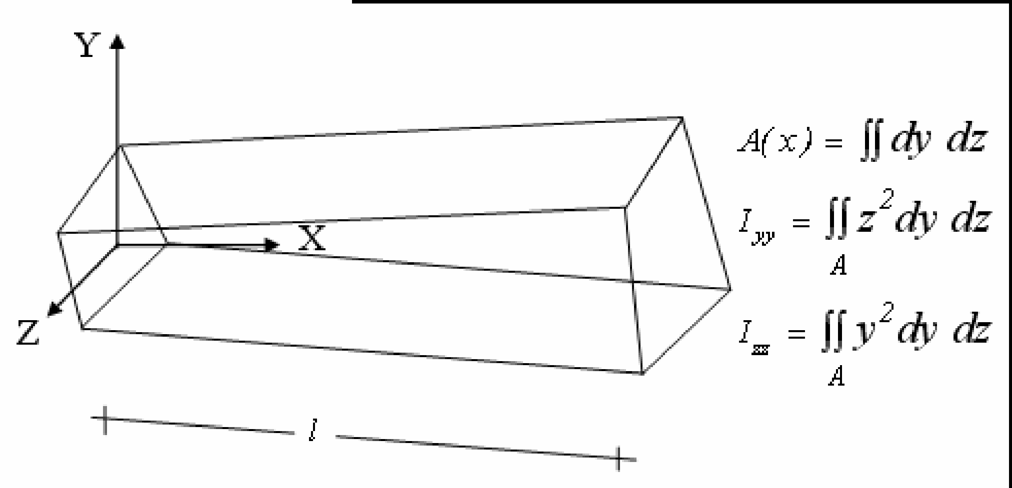
$$\boxed{\delta U = \iiint_V \tau \;\delta\varepsilon \; dV}$$

Ελαστική δυνατή ενέργεια γραμμικών δομικών στοιχείων

- εκφράζοντας τις τάσεις και παραμορφώσεις, κατά τον υπολογισμό της ελαστικής δυνατής ενέργειας, συναρτήσει των εντατικών μεγεθών

➔ μπορούμε να διατυπώσομε τις επιπλέον εξισώσεις που απαιτούνται για την επίλυση υπερστατικών φορέων





Ελαστική δυνατή ενέργεια λόγω αξονικών δυνάμεων

- πραγματικές ορθές τάσεις λόγω αξονικών δυνάμεων

$$\tau_{xx}(x) = \sigma_x = \frac{N(x)}{A(x)}$$

- επιβολή δυνατών αξονικών παραμορφώσεων
- νόμος του Hooke $\tau_{xx} = \sigma_x = E\,\varepsilon_{xx}$

⇨ ελαστική ενέργεια θεωρώντας γραμμικά ελαστικό υλικό:

$$\delta U = \iiint_V \tau_{xx} \cdot \delta\varepsilon_{xx}\, dV = \iiint_V \frac{N}{A} \cdot \frac{\delta N}{AE} dV = \int_l \frac{N}{A} \cdot \frac{\delta N}{AE} \left(\iint_A dy\, dz \right) dx = \int_l N \cdot \frac{\delta N}{AE} dx$$

$$\boxed{\delta U = \int_l N \cdot \frac{\delta N}{AE}\, dx}$$

Ελαστική δυνατή ενέργεια καμπτικών ροπών M_z ή M_y

➡ ορθές τάσεις: $$\tau_{xx} = \sigma_x = \frac{M_z}{I_{zz}} y$$

- γραμμικά ελαστικό υλικό: ➡ $$\tau_{xx} = \sigma_x = E\,\varepsilon_{xx}$$

$$\delta U_z = \iiint_V \tau_{xx} \cdot \delta\varepsilon_{xx}\, dV = \iiint_V \frac{M_z}{I_z} y \cdot \frac{\delta M_z}{E \cdot I_z} y\, dV = \int_l \frac{M_z}{I_z} \cdot \frac{\delta M_z}{E \cdot I_z} \left(\iint_A y^2\, dy\, dz \right) dx = \int_0^l M_z \cdot \frac{\delta M_z}{E \cdot I_z}\, dx$$

$$\boxed{\delta U_z = \int_0^l M_z \cdot \frac{\delta M_z}{E \cdot I_z}\, dx}$$

$$\tau_{xx} = \sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z$$ ➡ $$\boxed{\delta U_y = \int_0^l M_y \cdot \frac{\delta M_y}{E \cdot I_y}\, dx}$$

Ελαστική δυνατή ενέργεια τεμνουσσών δυνάμεων V_y ή V_z

- διατμητικές τάσεις: $\tau_{xy} = \dfrac{V_y\, S_y}{I_{zz}\, b}$ $\quad \tau_{xz} = \dfrac{V_z\, S_z}{I_{yy}\, h}$

- γραμμικά ελαστικό υλικό: $\gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G}$ $\quad \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G}$ $\quad G = \dfrac{E}{2\cdot(1+\nu)}$

$$\delta U = \iiint_V \tau_{xy}\cdot\delta\gamma_{xy}\, dV = \iiint_V \frac{V_y\, S_y}{I_{zz}\, b}\cdot\frac{\delta V_y\, S_y}{G I_{zz}\, b}\, dV = \int_0^l \frac{V_y}{I_{zz}}\cdot\frac{\delta V_y}{G I_{zz}}\left(\iint_A \left(\frac{S_y}{b}\right)^2 dy\, dz\right) dx = \int_0^l V_y\cdot\frac{\delta V_y}{G I_{zz}^{\,2}}\left(\iint_A \left(\frac{S_y}{b}\right)^2 dy\, dz\right) dx$$

$$\boxed{\delta U_y = \int_0^l V_y\cdot\frac{\delta V_y}{G\cdot A_y}\, dx} \qquad A_y = \frac{A}{k_y}$$

$$A_z = \frac{A}{k_z} \quad \rightarrow \quad \boxed{\delta U_z = \int_0^l V_z\cdot\frac{\delta V_z}{G\cdot A_z}\, dx}$$

Ελαστική δυνατή ενέργεια λόγω ροπών στρέψης M_x

διατμητικές τάσεις:
(λόγω ροπής στρέψης)

$$\tau = \frac{M_x r}{J}$$

γραμμικά ελαστικό υλικό (Hooke's law):

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\delta U = \iiint_V \tau_r \cdot \delta\gamma_r \, dV = \iiint_V \frac{M_x r}{J} \cdot \frac{\delta M_x r}{GJ} dx\,dy\,dz = \int_0^l \frac{M_x}{J} \cdot \frac{\delta M_x}{G \cdot J} \left(\iint_A r^2 dy\,dz \right) dx = \int_0^l M_x \cdot \frac{\delta M_x}{G \cdot J} dx$$

πολική ροπή αδράνειας:

$$J = \iint_A r^2 dy\,dz$$

r : απόσταση από το
κέντρο της διατομής

$$\boxed{\delta U = \int_0^l M_x \cdot \frac{\delta M_x}{G \cdot J} dx}$$

Δυνατή ελαστική ενέργεια (δυνατό εσωτερικό έργο)

Έχοντας περισσότερες από μια μορφές δυνατών μορφών παραμόρφωσης, η συνολική ελαστική δυνατή ενέργεια ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ελαστικών δυνατών ενεργειών για κάθε διαφορετικό είδος παραμόρφωσης.

⇨ συνολικά η ελαστική ενέργεια, στη γενική περίπτωση γραμμικών (ραβδωτών) μελών, δίνεται από την πιο κάτω γενική εξίσωση, η οποία αντιστοιχεί στη *μέθοδο των δυνατών μετακινήσεων*:

$$\delta U = \int_0^L \left(N \left(\frac{\delta N}{A\,E} \right) + V_y \left(\frac{\delta V_y}{G A_y} \right) + V_z \left(\frac{\delta V_z}{G A_z} \right) + T \left(\frac{\delta T}{G\,J} \right) + M_y \left(\frac{\delta M_y}{E\,I_y} \right) + M_z \left(\frac{\delta M_z}{E\,I_z} \right) \right) dx$$

⇨ εναλλάσσοντας, τα πραγματικά εντατικά μεγέθη με τα δυνατά εντατικά μεγέθη η διατύπωση που αντιστοιχεί στη *μέθοδο των δυνατών δυνάμεων*:

$$\delta U = \int_0^L \left(\delta N \left(\frac{N}{A\,E} \right) + V_y \left(\frac{V_y}{G A_y} \right) + \delta V_z \left(\frac{V_z}{G A_z} \right) + \delta T \left(\frac{T}{G\,J} \right) + \delta M_y \left(\frac{M_y}{E\,I_y} \right) + \delta M_z \left(\frac{M_z}{E\,I_z} \right) \right) dx = \delta U^c$$

Υπολογισμός μετακινήσεων με την ΑΔΕ

- φορτίζοντας τον φορέα με μοναδιαίο δυνατό (φανταστικό) φορτίο στο σημείο και διεύθυνση της ζητούμενης άγνωστης (πραγματικής) μετακίνησης, επιλύουμε τον φορέα για αυτό το μοναδιαίο φορτίο
- ακολούθως, εφαρμόζοντας την πραγματική φόρτιση ή δράσεις υπολογίζουμε τις (πραγματικές) παραμορφώσεις οι οποίες προκαλούνται από τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη.
- σύμφωνα με την ΑΔΕ, το εξωτερικό έργο από την (πραγματική) μετακίνηση του σημείου εφαρμογής του δυνατού φορτίου πρέπει να ισούται με την ελαστική ενέργεια η οποία αποθηκεύεται από τα εντατικά μεγέθη που αντιστοιχούν στο μοναδιαίο φορτίο λόγω των (πραγματικών) παραμορφώσεων.

$\delta W_E^c = \delta U^c \quad \Rightarrow$	Δυνατό φορτίο (μοναδιαίο)	$\times$	Αντίστοιχες πραγματικές μετακινήσεις	=	Δυνατά εντατικά μεγέθη	$\times$	Αντίστοιχες πραγματικές παραμορφώσεις

↳ *μέθοδοι των δυνατών δυνάμεων*

Μέθοδοι των δυνατών μετακινήσεων

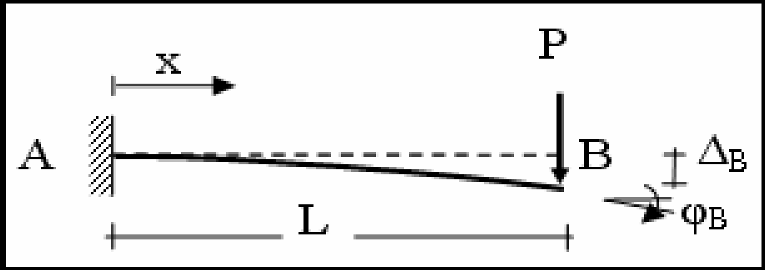
- αφού πρώτα επιβληθούν σε ένα φορέα οι πραγματικές φορτίσεις
- δυνατές (δηλαδή νοητές) μετακινήσεις επιβάλλονται σε αυτόν επιτρέποντας ουσιαστικά ένα εναλλακτικό τρόπο διατύπωσης των εξισώσεων ισορροπίας.

$\delta W_E = \delta U \quad \Rightarrow$	*Πραγματικό φορτίο*	$\times$	*Δυνατές μετακινήσεις*	$=$	*Πραγματικά εντατικά μεγέθη*	$\times$	*Δυνατές παραμορφώσεις*

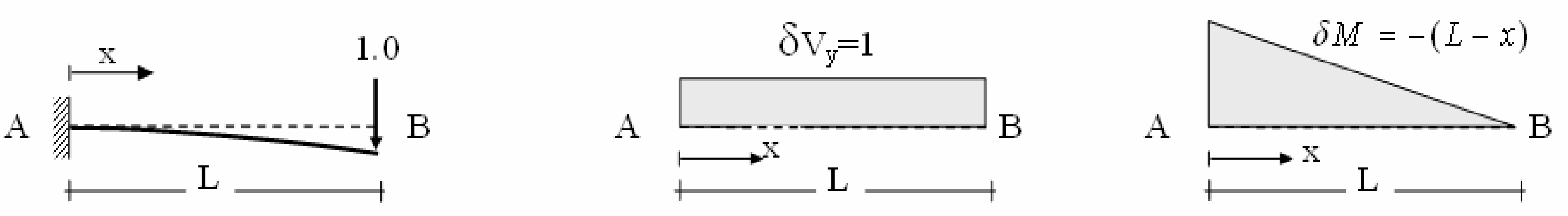
↳ *μέθοδοι των δυνατών μετακινήσεων*

Παράδειγμα εφαρμογής της ΑΔΕ

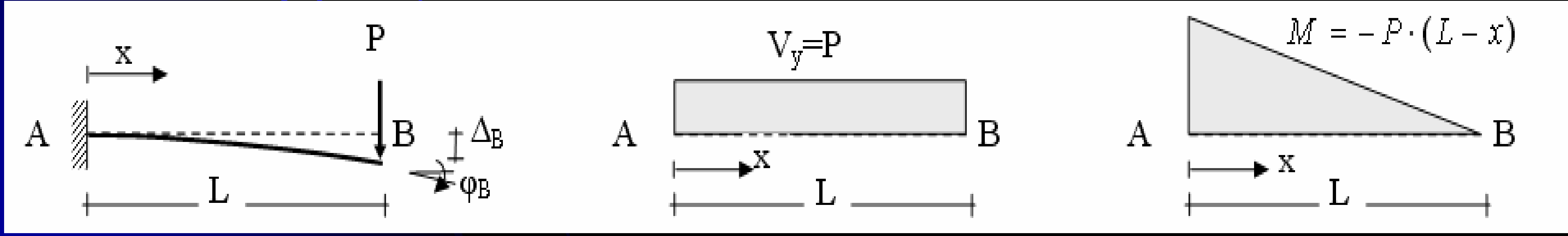
Υπολογισμός βύθισης και
στροφής του άκρου
προβόλου λόγω δύναμης *P*:



- πρώτα, πρέπει να φορτίσουμε τη δοκό στο σημείο και τη διεύθυνση της ζητούμενης μετακίνησης με μοναδιαία δύναμη



- *ακολούθως, φορτίζουμε τη δοκό με το πραγματικά επιβαλλόμενο φορτίο P, το οποίο προκαλεί εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση η οποία έχει σαν αποτέλεσμα τις ζητούμενες μετακινήσεις*



- με την επιβολή του φορτίου και την παραμόρφωση της δοκού το σημείο εφαρμογής της μοναδιαίας δυνατής δύναμης μετακινείται σύμφωνα με την πραγματική βύθιση στο άκρο της δοκού παράγοντας *εξωτερικό δυνατό (συμπληρωματικό) έργο*
- εσωτερικό δυνατό (συμπληρωματικό) έργο προκύπτει από τα δυνατά εντατικά μεγέθη λόγω των πραγματικών παραμορφώσεων οι οποίες αντιστοιχούν στα πραγματικά εντατικά μεγέθη

⇨ σύμφωνα με την αρχή των δυνατών (συμπληρωματικών) έργων:

$$1 \cdot \Delta = \int_0^L \left(\delta V_y \left(\frac{V_y}{G A_y} \right) + \delta M_z \left(\frac{M_z}{E I_z} \right) \right) dx \quad \Rightarrow \quad \Delta = \int_0^L \left(1 \cdot \frac{P}{G A_y} + 1 \cdot (L - x) \cdot \frac{P(L-x)}{E I_z} \right) dx$$

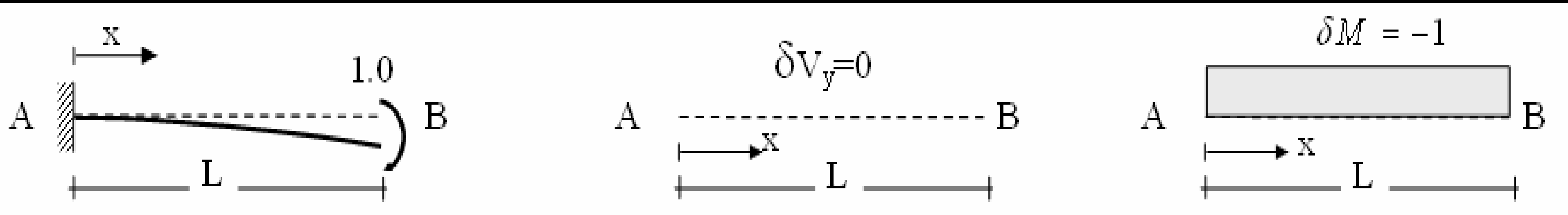
$$\Delta = \frac{P \cdot x}{G A_y} - \frac{P(L-x)^3}{3 E I_z} \Bigg|_0^L = \frac{P L}{G A_y} + \frac{P L^3}{3 E I_z}$$

- παραλείποντας τη συνεισφορά των διατμητικών παραμορφώσεων:

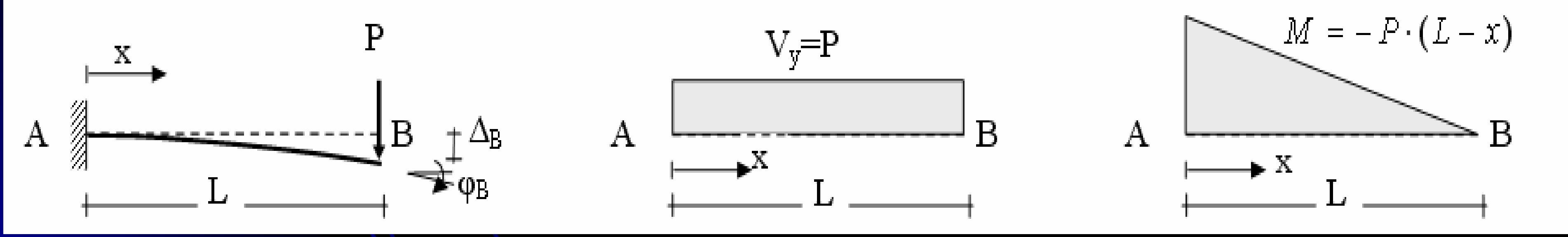
$$\Delta \approx \frac{P L^3}{3 E I_z}$$

- **Υπολογισμός της στροφής στο ελεύθερο άκρο του προβόλου**

  - φορτίζουμε τη δοκό στο σημείο και τη διεύθυνση της ζητούμενης στροφής με μοναδιαία ροπή, η οποία προκαλεί τέμνουσες δυνάμεις και καμπτικές ροπές



  - ακολούθως, φορτίζουμε τη δοκό με το πραγματικά επιβαλλόμενο φορτίο το οποίο προκαλεί τέμνουσες δυνάμεις και καμπτικές ροπές, και τις αντίστοιχες παραμορφώσεις και τις ζητούμενες μετακινήσεις



- με την επιβολή του φορτίου και την παραμόρφωση της δοκού το σημείο εφαρμογής της μοναδιαίας δυνατής ροπής μετακινείται σύμφωνα με την πραγματική στροφή στο άκρο της δοκού παράγοντας *εξωτερικό δυνατό (συμπληρωματικό) έργο*

- *εσωτερικό δυνατό (συμπληρωματικό) έργο* προκύπτει τα δυνατά εντατικά μεγέθη λόγω των πραγματικών παραμορφώσεων

⇨ σύμφωνα με την αρχή των δυνατών (συμπληρωματικών) έργων:

$$1 \cdot \varphi = \int_0^L \left(\delta V_y \left(\frac{V_y}{G A_y} \right) + \delta M_z \left(\frac{M_z}{E I_z} \right) \right) dx$$

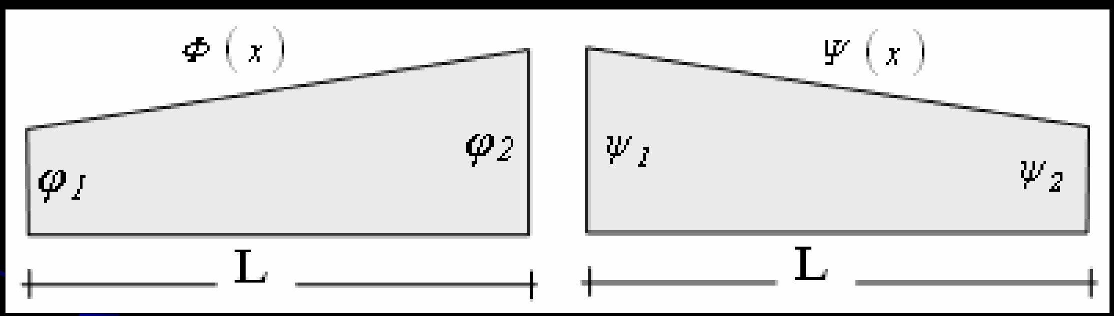
$$\phi = \int_0^L \left(0 \cdot \frac{P}{G A_y} + 1 \cdot \frac{P(L-x)}{E I_z} \right) dx$$

$$\phi = \left. \frac{P(L-x)^2}{2E I_z} \right|_0^L = -\frac{P L^2}{2 E I_z}$$

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων μορφής: $\int \Phi(x)\cdot\Psi(x)\,dx$

- *ολοκληρώνοντας τις αναλυτικές εκφράσεις για τις συναρτήσεις*
  - *ο γνωστός τρόπος που έχουμε χρησιμοποιήσει μέχρι τώρα*
  - συνήθως δεν είναι ο πιο εύκολος

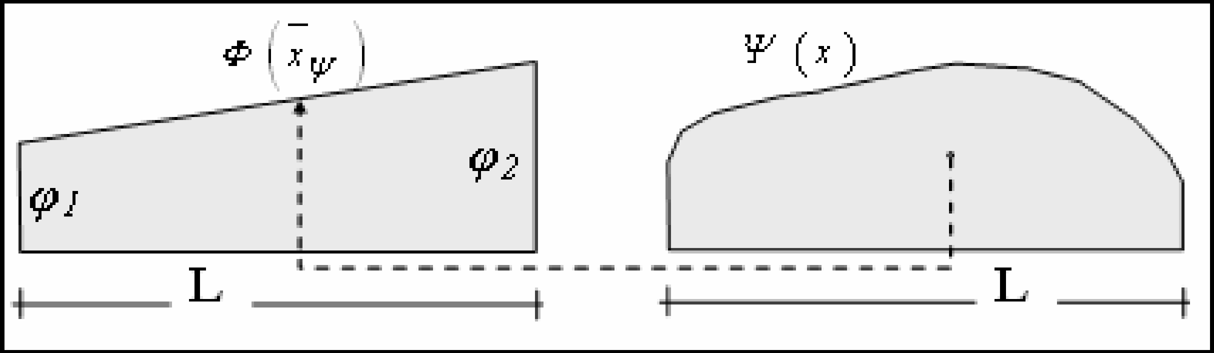
- *αν και οι δύο συναρτήσεις Φ(x) και Ψ(x) μεταβάλλονται γραμμικά*



$$\int_0^L \Phi(x)\cdot\Psi(x)\,dx = \frac{L}{6}\cdot\left(2\cdot\varphi_1\cdot\psi_1+\varphi_2\cdot\psi_1+\varphi_1\cdot\psi_2+2\cdot\varphi_2\cdot\psi_2\right)$$

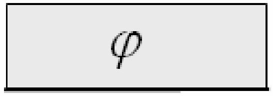
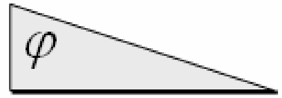
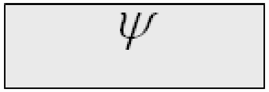
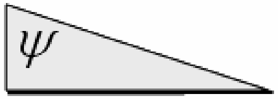
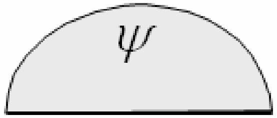
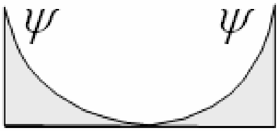
Υπολογισμός ολοκληρωμάτων μορφής: $\int \Phi(x) \cdot \Psi(x)\, dx$

- αν η μία από τις δύο συναρτήσεις μεταβάλλεται γραμμικά σε όλο το μήκος της ολοκλήρωσης, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα ισούται με το γινόμενο της επιφάνειας της άλλης συνάρτησης επί την τιμή της γραμμικά μεταβαλλόμενης συνάρτησης στο σημείο κατά μήκος του μέλους, το οποίο αντιστοιχεί στο κέντρο βάρους της επιφάνειας της άλλης συνάρτησης



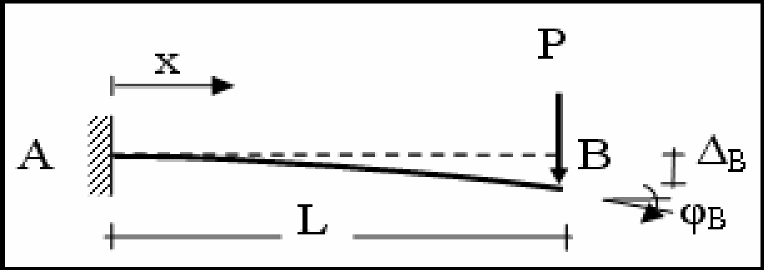
- *χρήση πινάκων με ορισμένα ολοκληρώματα για κοινές περιπτώσεις γινομένων Φ(x) και Ψ(x)*
  - *μπορούμε χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας να σχηματίσουμε το συγκεκριμένο διάγραμμα με κατάλληλη άθροιση ή αφαίρεση γνωστών επιμέρους διαγραμμάτων.*
  - *συνήθως ο πιο εύκολος τρόπος*

Πινάκες ορισμένων ολοκληρωμάτων μορφής: $\int \Phi(x)\cdot\Psi(x)\,dx$

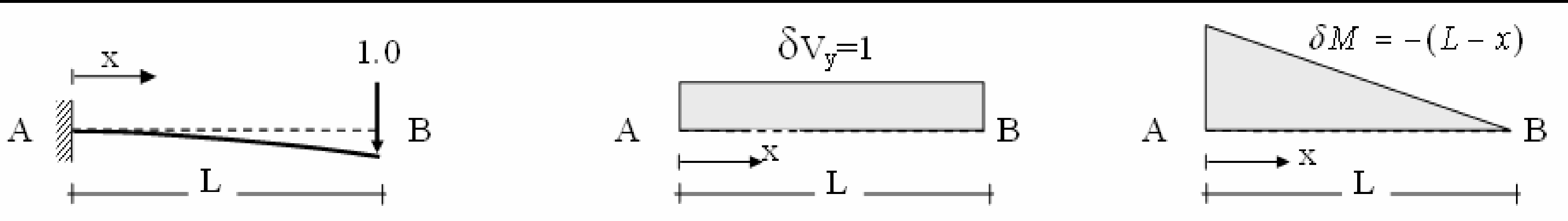
				
	$L\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{2}\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{2}\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{2}\cdot(\varphi_1+\varphi_2)\cdot\psi$
	$\frac{L}{2}\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{3}\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{6}\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{6}\cdot\psi\cdot(2\cdot\varphi_1+\varphi_2)$
	$\frac{L}{2}\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{6}\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{3}\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{6}\cdot\psi\cdot(\varphi_1+2\cdot\varphi_2)$
	$\frac{L}{2}\cdot\varphi\cdot(\psi_1+\psi_2)$	$\frac{1}{6}\cdot L\cdot\varphi\cdot(2\cdot\psi_1+\psi_2)$	$\frac{L}{6}\cdot\varphi\cdot(\psi_1+2\cdot\psi_2)$	$\frac{L}{6}\cdot\left[\psi_1\cdot(2\cdot\varphi_1+\varphi_2)+\psi_2\cdot(\varphi_1+2\cdot\varphi_2)\right]$
	$\frac{2}{3}\cdot L\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{3}\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{3}\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{3}\cdot\psi\cdot(\varphi_1+\varphi_2)$
	$\frac{L}{3}\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{6}\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{6}\cdot\varphi\cdot\psi$	$\frac{L}{6}\cdot\psi\cdot(\varphi_1+\varphi_2)$

Παράδειγμα εφαρμογής της ΑΔΕ με χρήση πινάκων

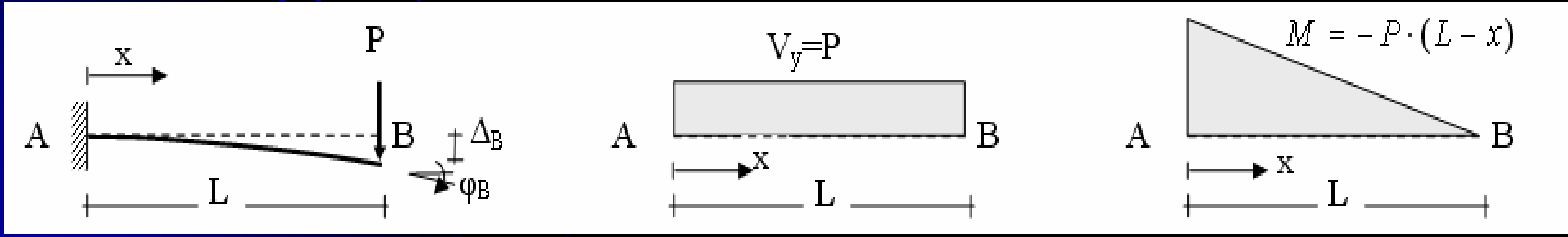
Υπολογισμός βύθισης και στροφής του άκρου προβόλου λόγω δύναμης *P*:



- πρώτα, πρέπει να φορτίσουμε τη δοκό στο σημείο και τη διεύθυνση της ζητούμενης μετακίνησης με μοναδιαία δύναμη



- *ακολούθως, φορτίζουμε τη δοκό με το πραγματικά επιβαλλόμενο φορτίο P, το οποίο προκαλεί εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση η οποία έχει σαν αποτέλεσμα τις ζητούμενες μετακινήσεις*



⇨ σύμφωνα με την αρχή των δυνατών (συμπληρωματικών) έργων:

$$1 \cdot \Delta = \int_0^L \left(\delta V_y \left(\frac{V_y}{GA_y} \right) + \delta M_z \left(\frac{M_z}{EI_z} \right) \right) dx \quad \Rightarrow \quad \Delta = \int_0^L \left(1 \cdot \frac{P}{GA_y} + 1 \cdot (L-x) \cdot \frac{P(L-x)}{EI_z} \right) dx$$

- ολοκληρώνοντας αναλυτικά:

$$\Delta = \frac{P \cdot x}{GA_y} - \frac{P(L-x)^3}{3EI_z} \Bigg|_0^L = \frac{PL}{GA_y} + \frac{PL^3}{3EI_z}$$

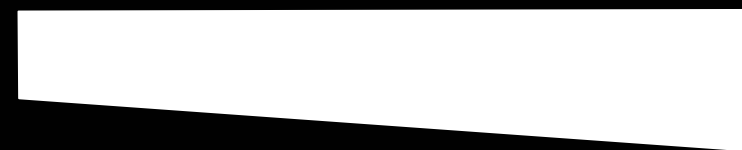
- χρήση των διαγραμμάτων των εντατικών μεγεθών και πινάκων :

$$\Delta = L \cdot 1 \cdot \frac{P}{GA_y} + \frac{1}{3} L \cdot L \cdot \frac{P \cdot L}{EI_z} = \frac{PL}{GA_y} + \frac{PL^3}{3EI_z}$$

Μη πρισματικά μέλη

- *πρισματικά μέλη:* τα γραμμικά μέλη ενός φορέα τα οποία έχουν σταθερή εγκάρσια διατομή

- *μη πρισματικά μέλη:* έχουν μεταβαλλόμενα κατά μήκος του άξονα τους γεωμετρικά χαρακτηριστικά



⇨ τα ολοκληρώματα για την ελαστική ενέργεια μπορούν να υπολογιστούν:

  - με αναλυτική ολοκλήρωση (ακριβής λύση)
  - προσεγγιστικά, αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα από ένα άθροισμα πεπερασμένου αριθμού τμημάτων, δηλαδή χωρίζοντας το μέλος σε ένα αριθμό τμημάτων και θεωρώντας για κάθε τμήμα μια ισοδύναμη πρισματική δοκό με σταθερές ιδιότητες.

π.χ. ελαστική ενέργεια καμπτικών παραμορφώσεων με μεταβαλλόμενη ροπή αδράνειας I_y κατά μήκος μίας δοκού:

$$\delta U = \int_0^L M_y \left(\frac{\delta M_y}{E\, I_y} \right) dx \approx \sum_{i=1}^{N} M_y^{\,i} \cdot \delta M_y^{\,i} \cdot \frac{\Delta L_i}{\left(E\, I_y\right)_i}$$

Παραμορφώσεις από άλλα, εκτός φορτίων, αίτια

- Θερμοκρασιακές μεταβολές
  - ομοιόμορφη καθ’ ύψος της διατομής:
    - ⇨ μεταβολή του μήκους του στοιχείου (επιμήκυνση ή βράχυνση)
  - διαφορετική στα δύο πέλματα ενός μέλους
    - ⇨ καμπτικής μορφής παραμορφώσεις και σχετικές στροφές των διατομών
- Κατασκευαστικές ατέλειες και σφάλματα
- Διαφορικές καθιζήσεις

Θερμοκρασιακές μεταβολές

- αύξηση/μείωση θερμοκρασίας ενός μέλους ⇨ διαστολή/συστολή
- εάν η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι:
  - ομοιόμορφη καθ' ύψος της διατομής: προκαλεί μεταβολή του μήκους *L* του στοιχείου (επιμήκυνση ή βράχυνση

$$\boxed{\Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta T}$$

  - διαφορετική στα δύο πέλματα ενός μέλους: θεωρώντας γραμμική μεταβολή της θερμοκρασίας *ΔT* καθ' ύψος *h* της διατομής, παρατηρείται στροφή γειτονικών διατομών, προκαλώντας καμπτικής μορφής παραμορφώσεις και σχετικές στροφές των διατομών.

$$\boxed{d\varphi = \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot dx}{h}} \longrightarrow \boxed{\Delta\varphi = \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot L}{h}}$$

(*α*: συντελεστής θερμικής διαστολής του υλικού)

Εφαρμογή της ΑΔΕ για θερμοκρασιακές μεταβολές

- Για να υπολογιστούν οι μετακινήσεις ενός σημείου λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ΑΔΕ εφαρμόζοντας μοναδιαίο δυνατό φορτίο στο σημείο και την διεύθυνση της ζητούμενης μετακίνησης:
  - ελαστική δυνατή ενέργεια λόγω *ομοιόμορφης* μεταβολής της θερμοκρασίας:

$$\boxed{\delta U = \int_0^L \delta N \cdot \alpha \cdot \Delta T \, dx}$$

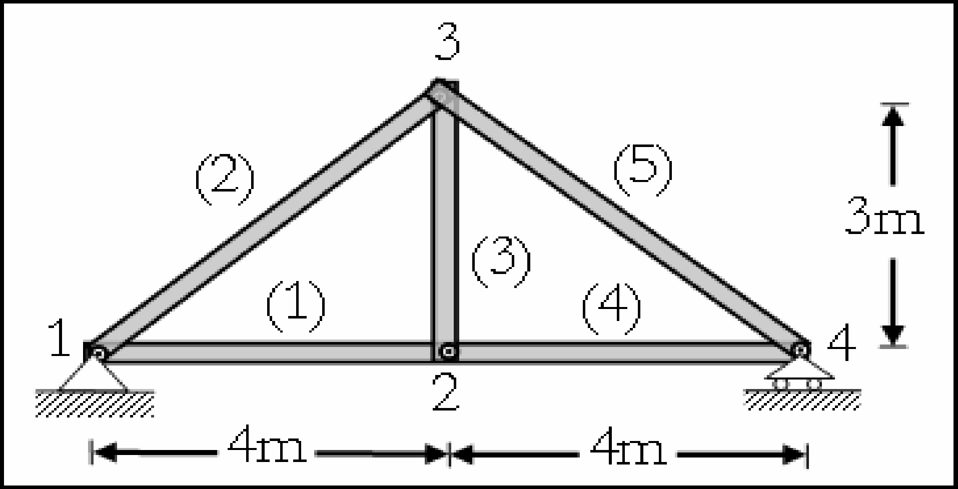
  - ελαστική δυνατή ενέργεια λόγω *διαφορικής* μεταβολής της θερμοκρασίας:

$$\boxed{\delta U = \int_0^L \delta M_z \cdot \frac{\alpha \cdot \Delta T}{h} dx} \qquad \boxed{\delta U = \int_0^L \delta M_y \cdot \frac{\alpha \cdot \Delta T}{b} dx}$$

Παράδειγμα θερμοκρασιακών μεταβολών

Υπολογισμός οριζόντιας και κάθετης μετακίνηση του κόμβου *3* του δικτυώματος λόγω αύξησης θερμοκρασίας της ράβδου 2 κατά *20 ^oC*

($\alpha = 10^{-5}/^oC$)



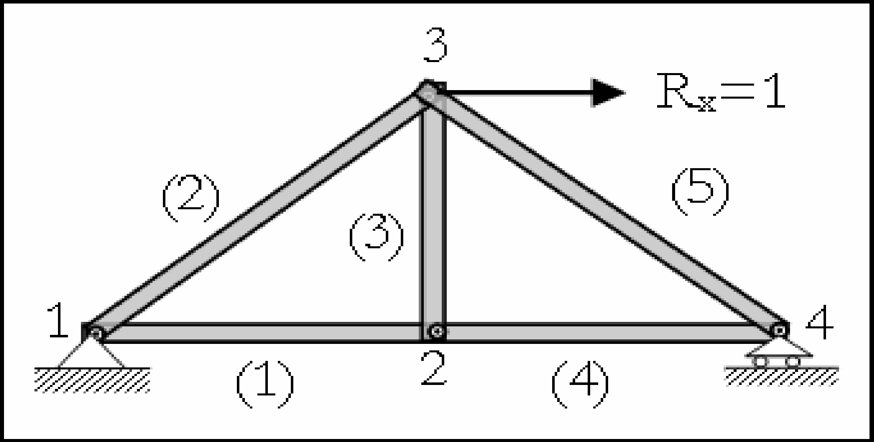
⇨ επιμήκυνση ράβδου 2:

$$\Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta T = 10^{-5} \cdot 5 \cdot 20 = 0.001m = 1mm$$

Παράδειγμα θερμοκρασιακών μεταβολών (συν.)

⇨ εφαρμόζοντας μοναδιαία δύναμη κατά τη *X* μπορούμε με την ΑΔΕ να υπολογίσουμε την αντίστοιχη άγνωστη μετακίνηση *u*:

$$\longrightarrow \quad \delta F_2 = 0.625$$



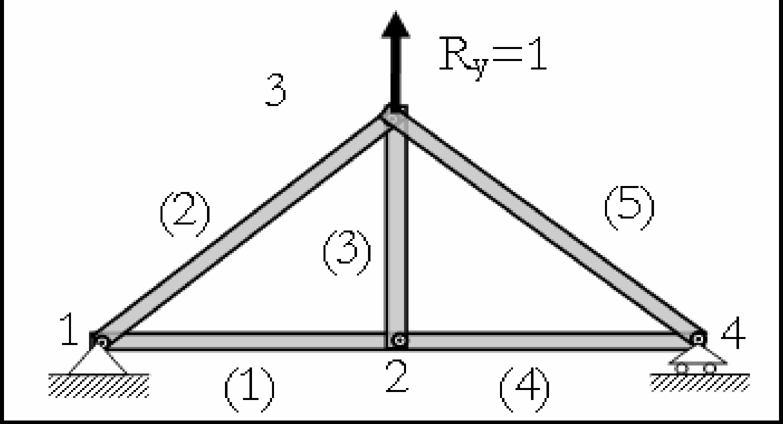
⇨ εξισώνοντας το εξωτερικό δυνατό (συμπληρωματικό) έργο, από τη δυνατή μοναδιαία φόρτιση και την αντίστοιχη πραγματική μετακίνηση, με την ελαστική δυνατή (συμπληρωματική) ενέργεια, από τις δυνατές αξονικές δυνάμεις στις ράβδους λόγω της εφαρμογής της μοναδιαίας δύναμης και τις αντίστοιχες αξονικές (πραγματικές) παραμορφώσεις από τη θερμοκρασιακή μεταβολή:

$$1 \cdot u = 0.625 \cdot 0.001 = 0.000625m = 0.625mm \quad \Rightarrow \quad u = 0.625mm$$

Παράδειγμα θερμοκρασιακών μεταβολών (συν.)

⇨ εφαρμόζοντας μοναδιαία δύναμη κατά τη Y μπορούμε με την ΑΔΕ να υπολογίσουμε την αντίστοιχη άγνωστη μετακινήση v:

$$(\delta F_2 = 0.833)$$



⇨ εξισώνοντας το εξωτερικό δυνατό (συμπληρωματικό) έργο, από τη δυνατή μοναδιαία φόρτιση και την αντίστοιχη πραγματική μετακίνηση, με την ελαστική δυνατή (συμπληρωματική) ενέργεια, από τις δυνατές αξονικές δυνάμεις στις ράβδους λόγω της εφαρμογής της μοναδιαίας δύναμης και τις αντίστοιχες αξονικές (πραγματικές) παραμορφώσεις από τη θερμοκρασιακή μεταβολή:

$$1 \cdot v = 0.833 \cdot 0.001 = 0.000833m = 0.833mm \quad \Rightarrow \quad v = 0.833mm$$

Κατασκευαστικές ατέλειες και σφάλματα

Σφάλματα και ατέλειες κατασκευής διαφόρων δομικών στοιχείων ενός φορέα, όπου δεν ταιριάζουν οι διαστάσεις με τις οποίες σχεδιάστηκαν με αυτές που πραγματικά κατασκευάστηκαν

- ισοστατικοί φορείς

  ⇨ γενικά δεν προκαλούν εντάσεις

- υπερστατικοί φορείς

  ⇨ αυτεντατική κατάσταση: ανάπτυξη επιπλέον εντατικής και παραμορφωσιακής κατάστασης

⇨ ο υπολογισμός των μετακινήσεων λόγω κατασκευαστικών ατελειών γίνεται όπως οι παραμορφώσεις λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών.

όταν συνυπάρχουν παραμορφώσεις λόγω φορτίων, θερμοκρασιακών μεταβολών και κατασκευαστικών ατελειών τις συνυπολογίζουμε αθροίζοντας τις συνέπειες τους

Διαφορικές καθιζήσεις

- οι κατασκευές, με το σχετικά μεγάλο βάρος τους, δεν εδράζονται πάνω σε απολύτως απαραμόρφωτη βάση, αλλά θεμελιώνονται σε παραμορφώσιμο έδαφος το οποίο μπορεί να παρουσιάσει καθιζήσεις

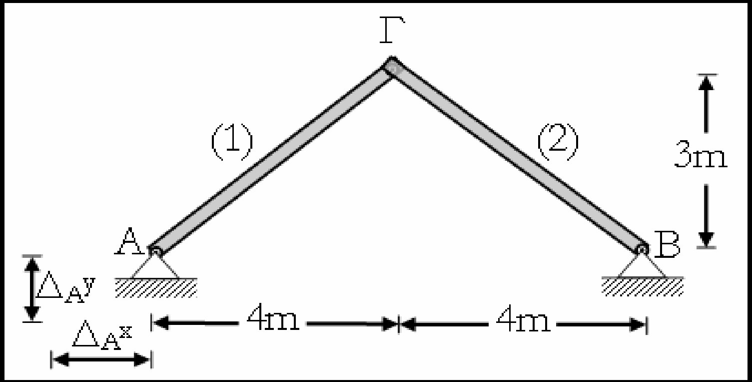
⇨ εξωτερικοί καταναγκασμοί λόγω διαφορικών μετακινήσεων (καθιζήσεων) των στηρίξεων μιας κατασκευής

  - ισοστατικοί φορείς
    - ⇨ αν και οι διαφορικές καθιζήσεις προκαλούν μετακινήσεις και στροφές των μελών της κατασκευής γενικά δεν προκαλούν παραμορφώσεις ή εντάσεις
    - ο υπολογισμός των μετακινήσεων μπορεί να γίνει εύκολα με την ΑΔΕ εφαρμόζοντας μοναδιαίο φορτίο στην κατεύθυνση της ζητούμενης μετακίνησης ως δυνατή φόρτιση αφού η ελαστική δυνατή ενέργεια ισούται με μηδέν εφόσον δεν αναπτύσσονται (πραγματικές) παραμορφώσεις σε ένα ισοστατικό φορέα
  - υπερστατικοί φορείς
    - ⇨ ανάπτυξη εντατικών μεγεθών και παραμορφώσεων
    - το μέγεθος των εντατικών μεγεθών εξαρτάται από το μέγεθος των καθιζήσεων και τη δυσκαμψία της κατασκευής

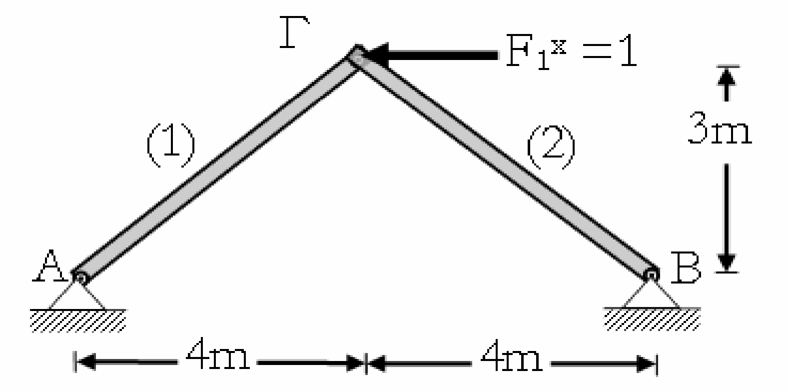
Παράδειγμα διαφορικών καθιζήσεων

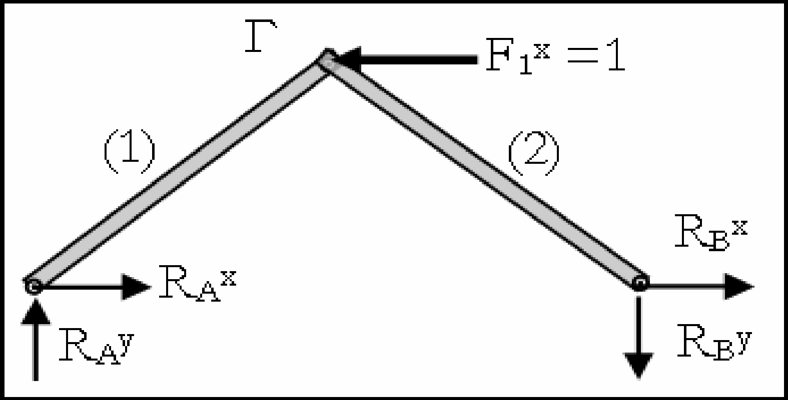
Υπολογισμός οριζόντιας μετακίνησης του κόμβου *Γ* λόγω υποχώρησεων της στηρίξεως *A* κατά:

$$\Delta X = -0.02m \qquad \Delta Y = -0.01m$$



ΑΔΕ: εφαρμόζοντας στο *Γ* μια οριζόντια μοναδιαία δυνατή δύναμη





→ αντιδράσεις: $R_A^x = R_B^x = 0.5$ $\quad R_A^y = R_B^y = 0.125$

Παράδειγμα διαφορικών καθιζήσεων (συν.)

⇨ το εξωτερικό δυνατό (συμπληρωματικό) έργο ισούται με:

$$\delta W_E^c = R_A^x \cdot \left(\Delta_A^x\right) + R_A^y \cdot \left(\Delta_A^y\right) + 1.0 \cdot \Delta_A^x = 0.5 \cdot (-0.02) + 0.125 \cdot (-0.01) + \Delta_A^x$$

$$\delta W_E^c = -0.01125 + \Delta_A^x$$

⇨ το εσωτερικό δυνατό (συμπληρωματικό) έργο ισούται με:

$$\delta U = 0$$

(αφού δεν αναπτύσσονται παραμορφώσεις σε ένα ισοστατικό φορέα λόγω μετακινήσεων των στηρίξεων του)

$$\delta W_E^c = \delta U^c = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta_A^x = 0.01125\,m$$