ΠΠΜ 220: Στατική Ανάλυση των Κατασκευών Ι

Διαλέξεις 30-34

Μέθοδοι επίλυσης υπερστατικών φορέων: Μέθοδοι των δυνάμεων

Τρίτη, 16, Τετάρτη, 17, Παρασκευή 19
Τρίτη, 23, και Τετάρτη 24 Νοεμβρίου
2004

Πέτρος Κωμοδρόμος
komodromos@ucy.ac.cy
http://www.ucy.ac.cy/~petrosk

Θέματα

- Υπερστατικοί φορείς
- Μέθοδοι επίλυσης υπερστατικών φορέων
- Μέθοδος των συμβιβαστών μετακινήσεων
- Εφαρμογές σε προβλήματα μεγαλύτερου βαθμού στατικής αοριστίας
- Θεώρημα Betti και σχέσεις αμοιβαιότητας
  - Θεώρημα αμοιβαιότητας των μετακινήσεων Maxwell-Betti
- Εφαρμογές της συμβιβαστότητας των μετακινήσεων:
  - Δικτυώματα
  - Πλαίσια
  - Σύνθετοι φορείς
- Προβλήματα με παραμορφώσεις από άλλα αίτια
  - Θερμοκρασιακές μεταβολές
  - Κατασκευαστικές ατέλειες
  - Μετακινήσεις στηρίξεων
- Ελαστικές στηρίξεις

Ισοστατικοί/Υπερστατικοί φορείς

- Ισοστατικοί φορείς
  - αρκούν οι εξισώσεις ισορροπίας για την επίλυση τους
  - καταναγκασμοί δεν προκαλούν εντάσεις και παραμορφώσεις στα μέλη
  - οποιαδήποτε αστοχία σε μια ισοστατική κατασκευή την καθιστά μηχανισμό, αφού δεν έχει πλεονάζουσες στηρίξεις για να παραλάβουν τα φορτία, εάν μια από τις στηρίξεις, συνδέσεις ή μέλη αστοχήσει

- Υπερστατικοί φορείς
  - για την επίλυση τους πέρα από τις εξισώσεις ισορροπίας απαιτούνται τόσες επιπλέον εξισώσεις όσο ο βαθμός στατικής αοριστίας
    - οι επιπλέον εξισώσεις εκφράζουν την συμβιβαστότητα των παραμορφώσεων (λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη γεωμετρικά/μηχανικά χαρακτηριστικά)
  - μια υπερστατική κατασκευή είναι γενικά πιο δύσκαμπτη από την αντίστοιχη ισοστατική κατασκευή και παρουσιάζει πολύ μικρότερες παραμορφώσεις και μετακινήσεις
  - η υπερστατικότητα λειτουργεί σαν ασφαλιστική δικλίδα, αφού σε περίπτωση κάποιας αστοχίας, ανακατανομή των εντατικών μεγεθών είναι συνήθως δυνατή αποφεύγοντας κατάρρευση της κατασκευής.

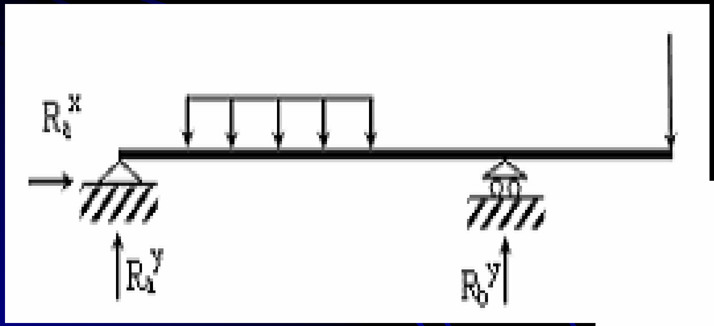
Στατικότητα απλών δοκών

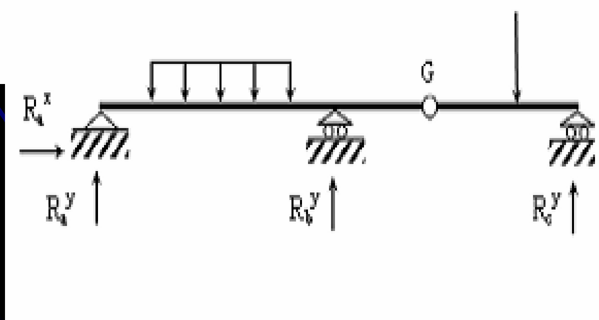
A < E + N → μηχανισμός ή χαλαρός φορέας

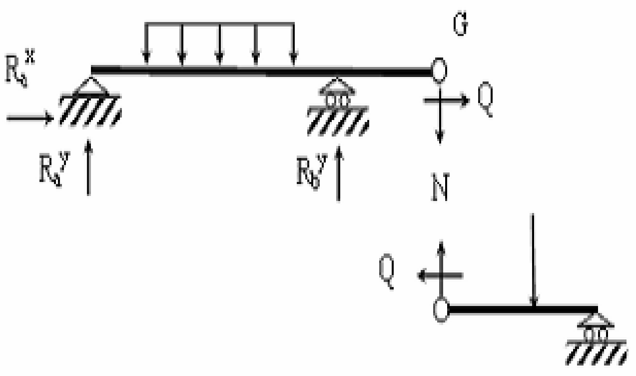
A = E + N → ισοστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας

A > E + N → υπερστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας
(βαθμός στατικής αοριστίας: R - G - N)

N: Επίπεδοι φορείς: $N = 3$ Χωρικοί φορείς: $N = 6$
A: αντιδράσεις E: αριθμός εσωτερικών ελευθεριών







Στατικότητα πλαισίων (φορέων με βρόγχους)

Τομές → για να απλοποιηθεί ο φορέας

$\alpha < n\,N$ → μηχανισμός ή χαλαρός φορέας

$\alpha = n\,N$ → ισοστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας

$\alpha > n\,N$ → υπερστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας
(βαθμός στατικής αοριστίας: $\alpha - n\,N$)

N: Επίπεδοι φορείς: $N = 3$ Χωρικοί φορείς: $N = 6$
α: αντιδράσεις συμπεριλαμβανομένων εντατικών μεγεθών σε τομές
n: αριθμός επιμέρους τμημάτων φορέα

Μέθοδοι επίλυσης υπερστατικών φορέων

- οι μέθοδοι επίλυσης υπερστατικών φορέων πρέπει να ικανοποιούν:
  - τις συνθήκες ισορροπίας
  - τη συμβιβαστότητα των παραμορφώσεων
  - τη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων (καταστατικός νόμος του υλικού)

- μέθοδοι των δυνάμεων
  - βασίζονται στην αρχή των δυνατών συμπληρωματικών έργων
  - χρήσιμες για απλούς ελαστικά γραμμικούς υπερστατικούς φορείς
  - *μέθοδος των συμβιβαστών μετακινήσεων*
  - *μέθοδος ευκαμψίας ή μέθοδος ελαστικότητας*

- μέθοδοι των μετακινήσεων
  - βασίζονται στην αρχή των δυνατών έργων
  - αφού εκφρασθούν οι δυνάμεις συναρτήσει των μετακινήσεων εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας προσδιορίζεται ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων
  - υπολογίζοντας τις μετακινήσεις μπορούν από τις σχέσεις μετακινήσεων-δυνάμεων να προσδιοριστούν και οι άγνωστες δυνάμεις και τα εντατικά μεγέθη
  - *μέθοδος δυσκαμψίας*

Μέθοδος των συμβιβαστών μετακινήσεων

- για την επίλυση ενός N-βαθμού υπερστατικού φορέα εφαρμόζουμε N αριθμό ελευθεριών, αφαιρώντας νοητά κάποια *υπερστατικά μεγέθη*, είτε από στηρίξεις είτε με κατάλληλες νοητές τομές των μελών της κατασκευής, ώστε να καταστήσουμε το φορέα ισοστατικό, αλλά και σταθερό
- έχοντας επιλέξει τα πλεονάζοντα υπερστατικά μεγέθη X_1, X_2,… τα οποία θα αφαιρεθούν, επιβάλλοντας νοητά τις απαραίτητες ελευθερίες ώστε να καταστεί ο φορέας ισοστατικός, επιβάλλουμε σε αυτό το φορέα:
  - σύστημα-0: τις πραγματικά επιβαλλόμενες δράσεις
  - σύστημα-1: μοναδιαίο υπερστατικό μέγεθος X_1
  - σύστημα-2: μοναδιαίο υπερστατικό μέγεθος X_2
  - ……..
- υπολογίζουμε τις μετακινήσεις δ_{ij} θέση και διεύθυνση του υπερστατικού μεγέθους X_i λόγω της φόρτισης του συστήματος j
- για να διορθωθούν τα χάσματα τα οποία δημιουργούνται στις νοητές ελευθερίες πρέπει η συνεισφορά των αντίστοιχων αγνώστων δυνάμεων ή ροπών, τα οποία είναι εσωτερικά εντατικά μεγέθη ή αντιδράσεις σε στηρίξεις, να είναι τέτοια ώστε να αλληλοαναιρούνται και μηδενίζονται τα χάσματα τα οποία αναπτύσσονται

Μέθοδος των συμβιβαστών μετακινήσεων (συν.)

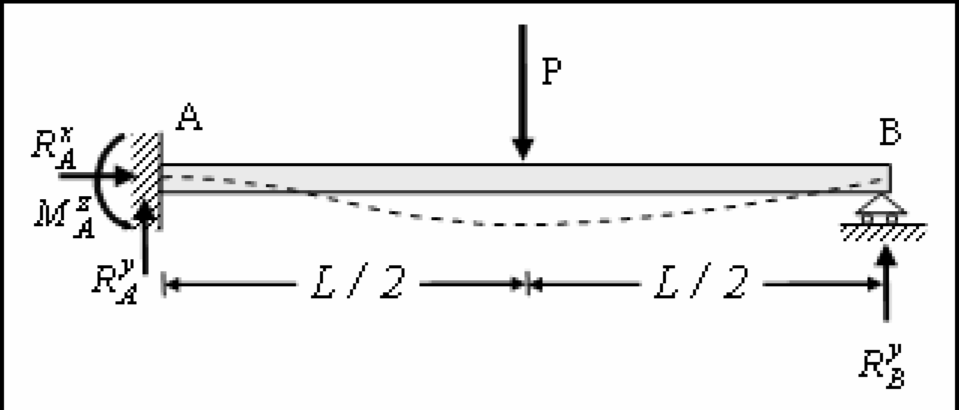
- το σύστημα-0 με όλες τις εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις και με τα υπερστατικά μεγέθη, με τις τιμές που απαιτούνται για να αναιρεθούν τα νοητά χάσματα, είναι ουσιαστικά ισοδύναμο με τον υπερστατικό φορέα, αφού πληροί τις δεδομένες συνοριακές συνθήκες στις στηρίξεις όπου τυχόν αφαιρέθηκαν υπερστατικά μεγέθη ή τις συνθήκες συνέχειας του υλικού όπου τυχόν έγινε νοητή εσωτερική τομή με το αντίστοιχο εσωτερικό εντατικό μέγεθος σαν υπερστατικό μέγεθος

- για να μπορεί να εφαρμοσθεί η μέθοδος των συμβιβαστών μετακινήσεων είναι να ισχύει η αρχή της επαλληλίας, η οποία ισχύει για γραμμικά ελαστικό υλικό και οι μετακινήσεις να είναι τόσο μικρές ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αρχική γεωμετρία του φορέα

- οι δείκτες (ή συντελεστές) ευκαμψίας (ελαστικότητας) δ_{ij} έχουν μονάδες *m/N* ή *radians/Nm* ανάλογα αν πρόκειται για δυνάμεις ή για ροπές

- οι δείκτες ευκαμψίας εξαρτώνται από τα γεωμετρικά και μηχανικά χαρακτηριστικά του φορέα και είναι απολύτως ανεξάρτητοι από τις εξωτερικές δράσεις, είτε πρόκειται για εξωτερικά επιβαλλόμενα φορτία είτε για καταναγκασμούς

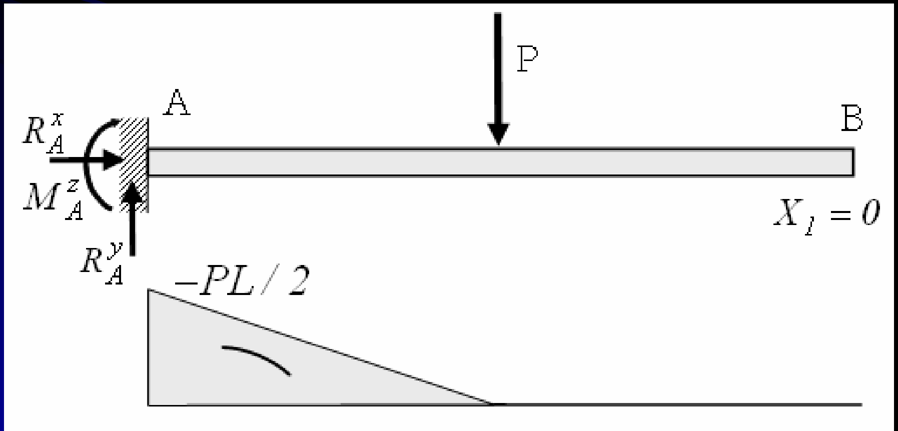
Παράδειγμα-1

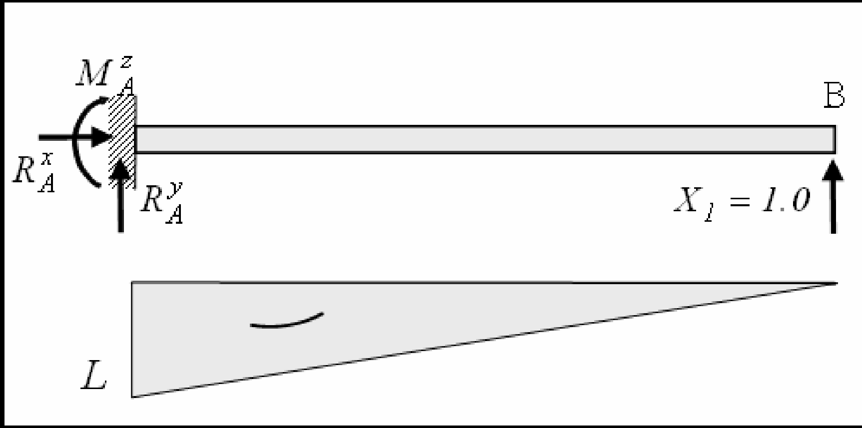


- μία φορά υπερστατικός φορέας

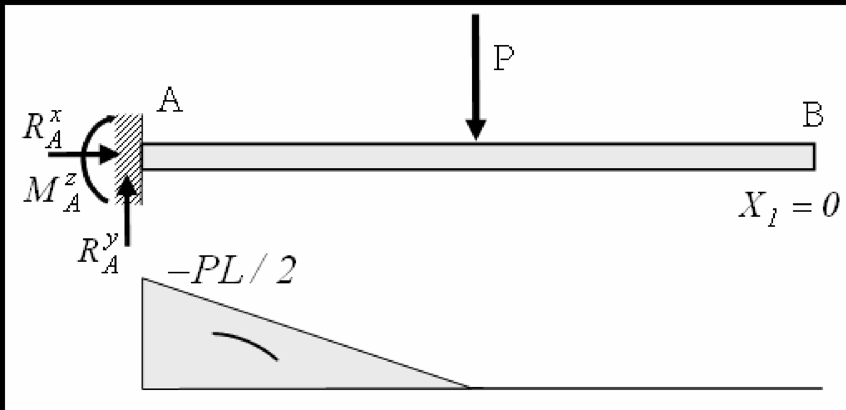
⇨ θα πρέπει να επιλέξουμε ένα σύστημα-0, έτσι ώστε ο φορέας του συστήματος-0 να είναι όχι μόνο ισοστατικός αλλά και σταθερός

= σύστημα-0 + σύστημα-1

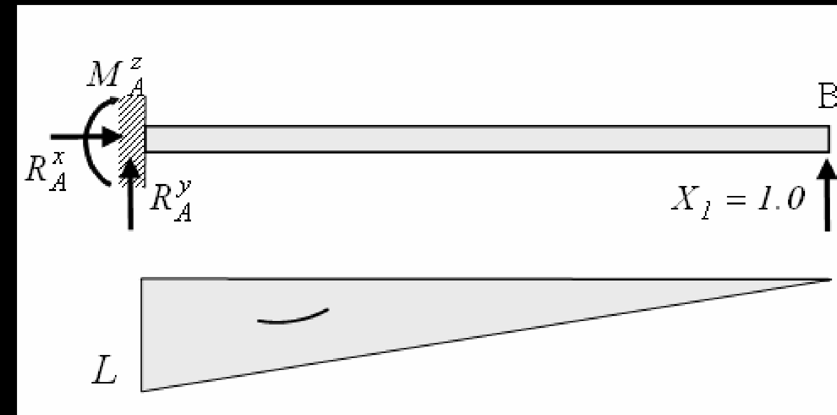




σύστημα-0



σύστημα-1

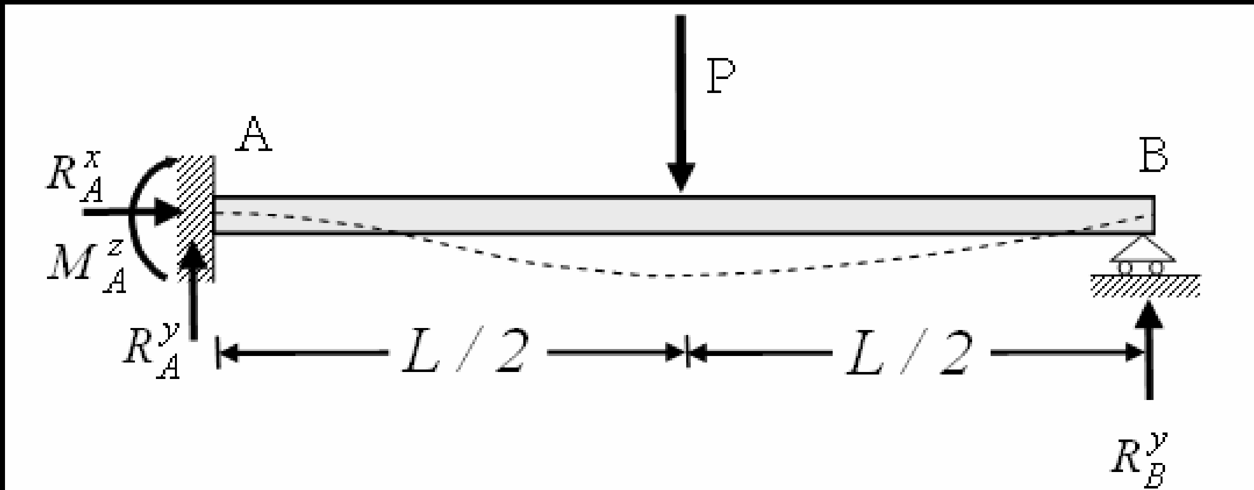


$$\delta_{10} = \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{(-P \cdot L)}{2} \cdot \left(2L + \frac{L}{2} \right) = -\frac{5 \cdot P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{3 \cdot E \cdot I} \cdot L \cdot L \cdot L = \frac{L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\dfrac{5 \cdot P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}}{\dfrac{L^3}{3 \cdot E \cdot I}} = \frac{5}{16} \cdot P$$



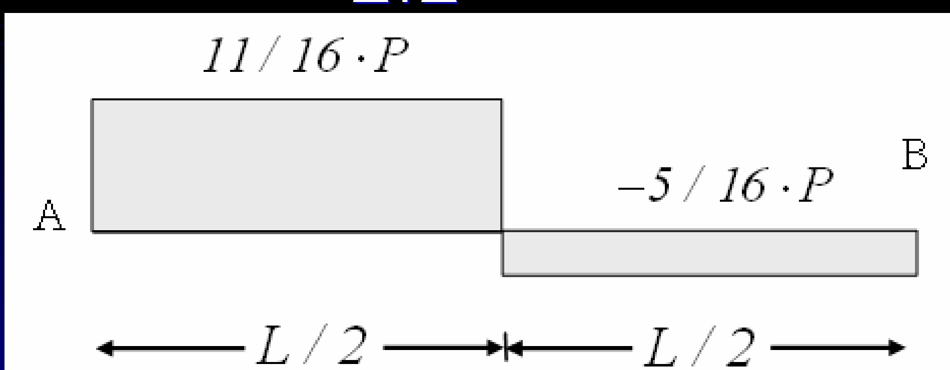
$$R_B^y = \frac{5}{16} \cdot P$$

$$R_A^x = 0$$

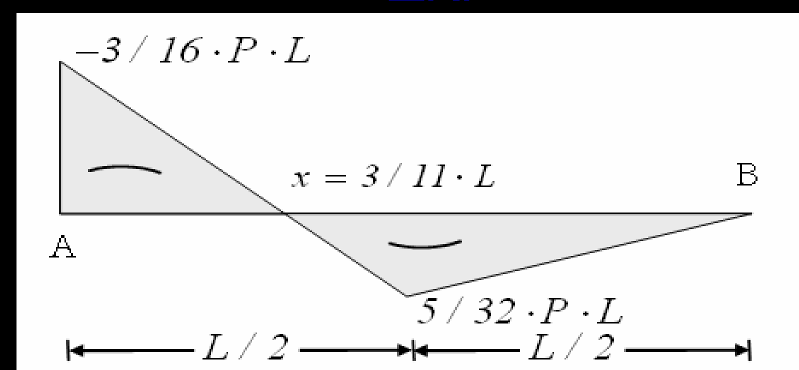
$$R_A^y = P - \frac{5}{16} \cdot P = \frac{11}{16} \cdot P$$

$$M_A^z = P \cdot \frac{L}{2} - \frac{5}{16} \cdot P \cdot L = \frac{3}{16} \cdot P \cdot L$$

ΔΤΔ

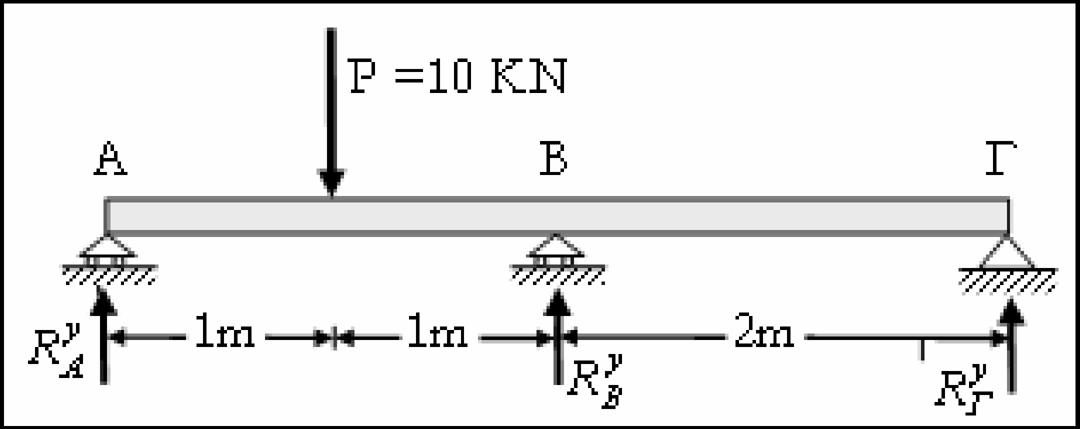


ΔΚΡ



$$M_z(x) = \frac{11}{16} P \cdot x - \frac{3}{16} \cdot P \cdot L = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{11} \cdot L$$

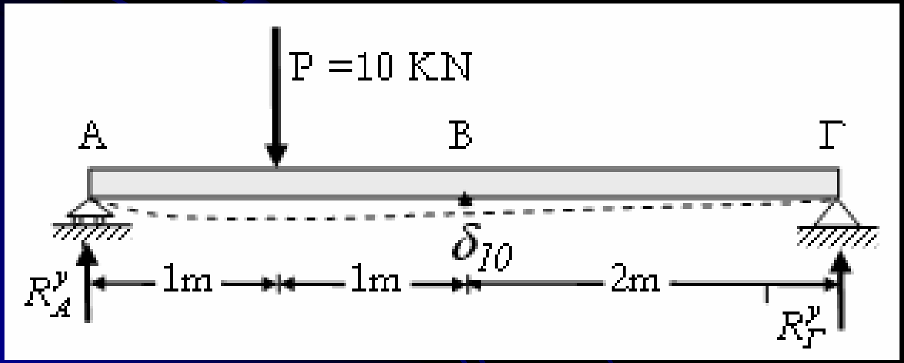
Παράδειγμα-2

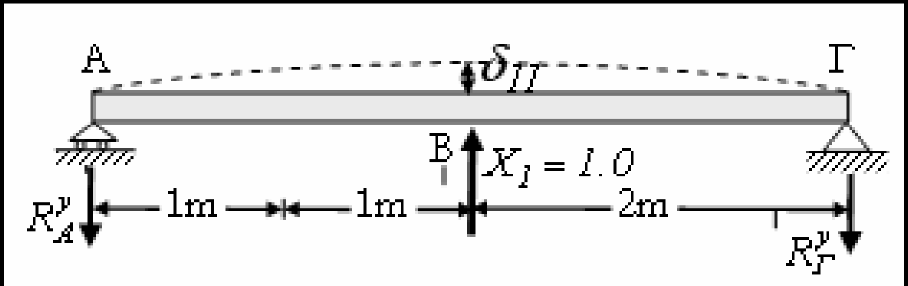


- μία φορά υπερστατικός φορέας

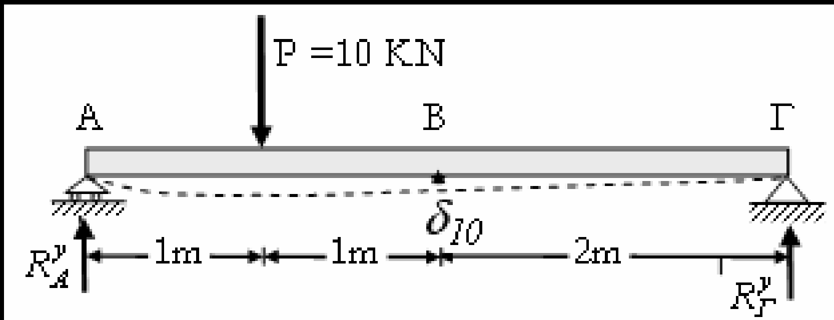
⇨ θα πρέπει να επιλέξουμε ένα σύστημα-0, έτσι ώστε ο φορέας του συστήματος-0 να είναι όχι μόνο ισοστατικός αλλά και σταθερός

= σύστημα-0 + σύστημα-1



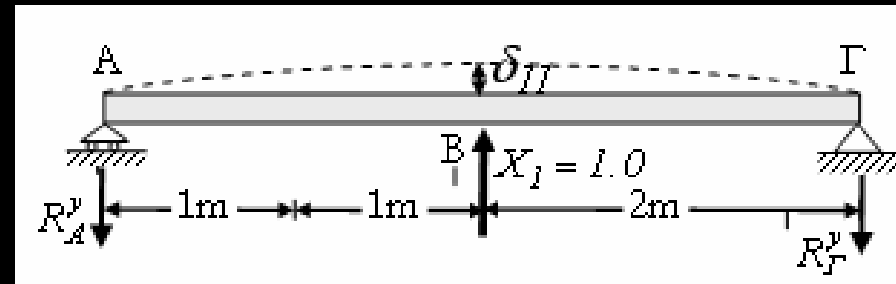


= σύστημα-0 + σύστημα-1



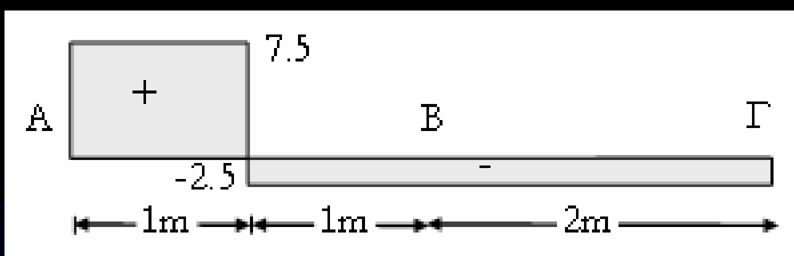
$R_A^y = 7.5\,KN$

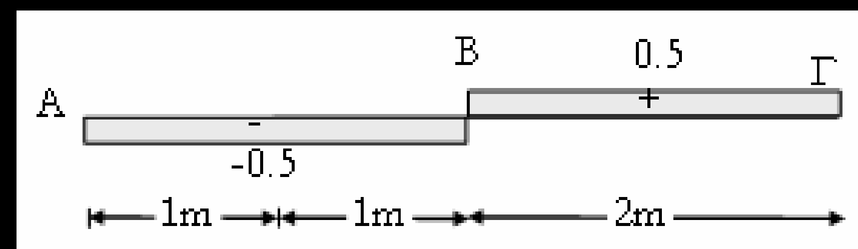
$R_\Gamma^y = 2.5\,KN$

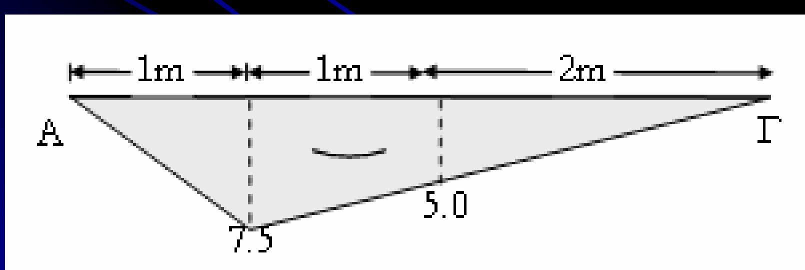


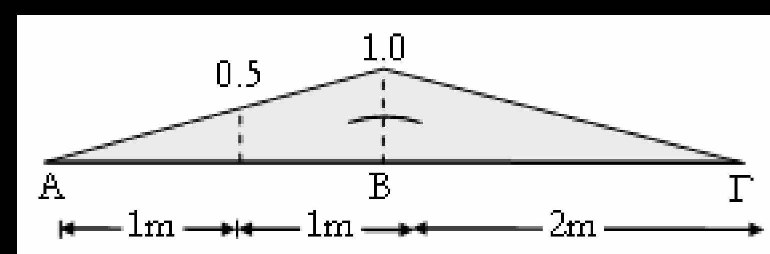
$R_A^y = -0.5\,KN$

$R_\Gamma^y = -0.5\,KN$









χρησιμοποιώντας τις καμπτικές ροπές της δοκού λόγω του εξωτερικού φορτίου και λόγω της εφαρμογής της μοναδιαίας δύναμης X_1 υπολογίζουμε τις μετακινήσεις:

$$\delta_{10} = \frac{1}{3EI} \cdot 7.5 \cdot (-0.5) + \frac{1}{6EI} \cdot \left\{7.5 \cdot \left(2 \cdot (-0.5) + (-1)\right) + 5.0 \cdot \left((-0.5) + (-2)\right)\right\} + \frac{2}{3EI} \cdot 5.0 \cdot (-1)$$

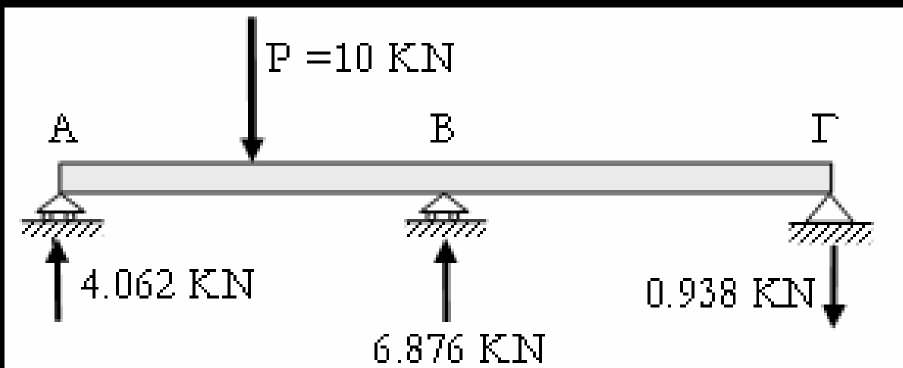
$$\Rightarrow \quad \delta_{10} = \frac{-3.75}{3EI} + \frac{-27.5}{6EI} + \frac{-5}{3EI} = -\frac{1.25 + 4.583 + 1.333}{EI} = -\frac{1.25 + 4.583 + 3.333}{EI} = -\frac{9.166}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{3EI} \cdot 2 \cdot (-1.0) \cdot (-1.0) = \frac{4}{3EI} = \frac{1.333}{EI}$$

συμβιβαστότητα των μετακινήσεων: $\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$

$$\Rightarrow \quad X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{9.166}{1.25} = 6.876\ KN$$

⇨ οι **συνολικές** αντιδράσεις και τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών προκύπτουν από την επαλληλία του συστήματος-0 και του συστήματος-1 πολλαπλασιαζόμενου επί 6.876, εφόσον η αντίδραση στη στήριξη Β είναι 6.876 φορές μεγαλύτερη της μοναδιαίας δύναμης.

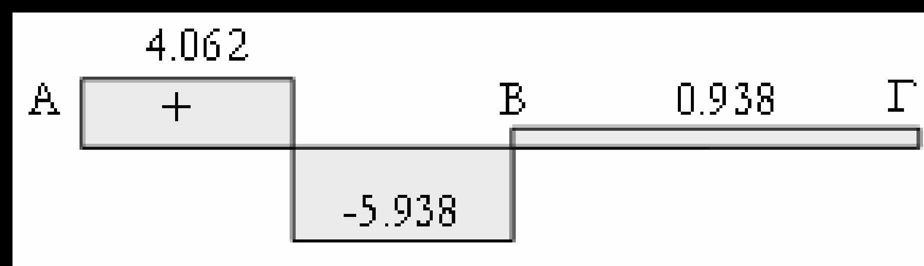


$$R_A^y = 7.5 + 6.878 \cdot \left(-0.5\right) = 4.062\ KN$$

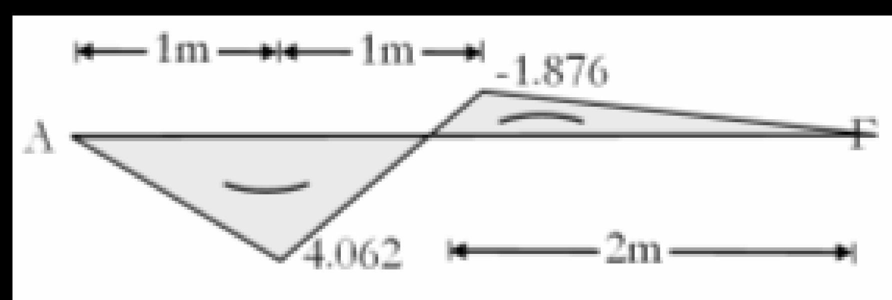
$$R_B^y = 6.876\ KN$$

$$R_\Gamma^y = 2.5 + 6.878 \cdot \left(-0.5\right) = -0.938\ KN$$

⇨ ΔΤΔ:



⇨ ΔΚΡ:



Προβλήματα μεγαλύτερου βαθμού στατικής αοριστίας

- εάν ο φορέας είναι δύο ή περισσότερες φορές υπερστατικός, τότε πρέπει να επιλέξουμε δύο ή περισσότερα, αντίστοιχα πλεονάζοντα υπερστατικά μεγέθη τα οποία νοητά μηδενίζουμε ώστε να προκύψει ο αντίστοιχος ισοστατικός φορέας που θα αποτελέσει το ‘σύστημα- 0’.

- π.χ. 2-φορές υπερστατικός φορέας

⇨ καθορισμός δύο υπερστατικών μεγεθών

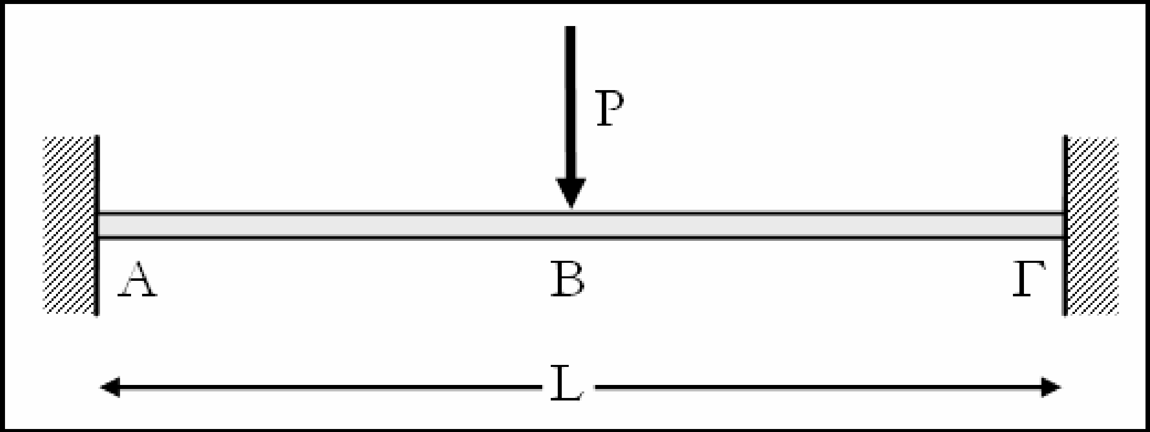
$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

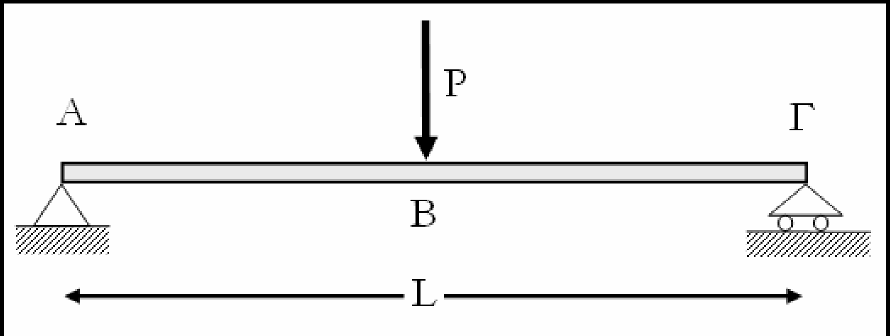
$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow F \cdot X + F_0 = 0$$

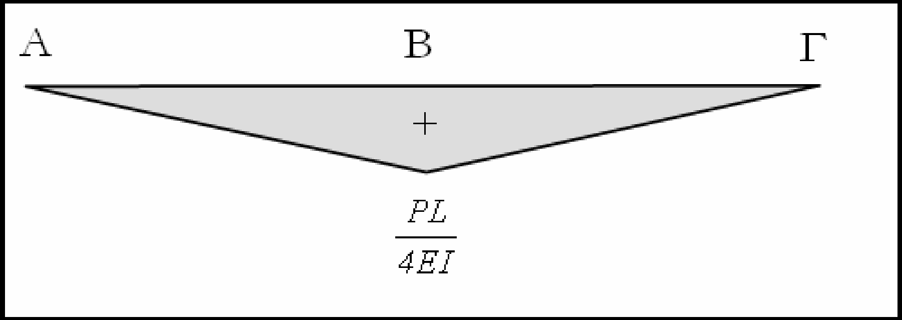
Παράδειγμα-2



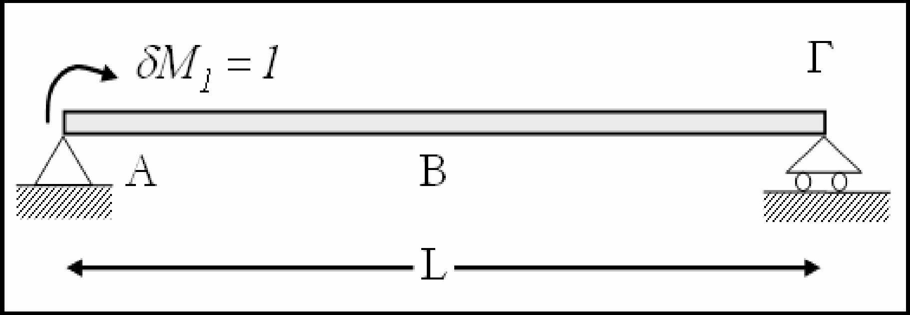
=

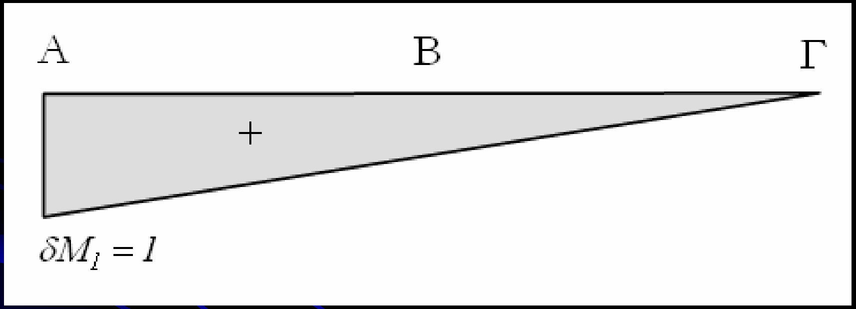
σύστημα-0



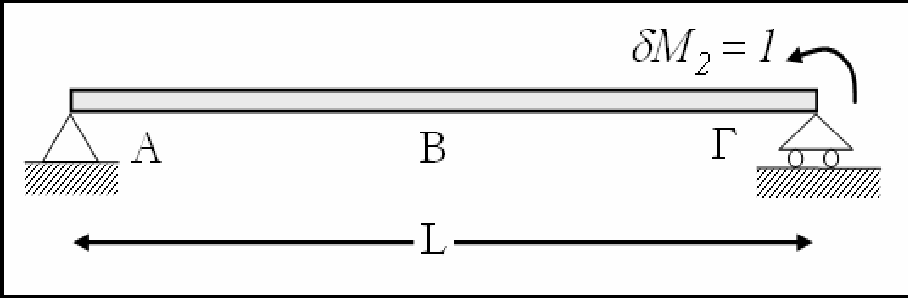


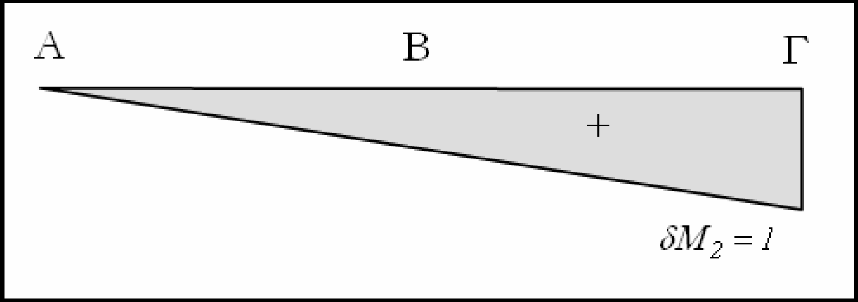
\+ σύστημα-1





\+ σύστημα-2





$$\Rightarrow \quad \delta_{10} = \frac{PL}{4EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{PL^2}{16EI}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{11} = \frac{L}{3EI}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{22} = \frac{L}{3EI}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{20} = \frac{PL}{4EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{PL^2}{16EI}$$

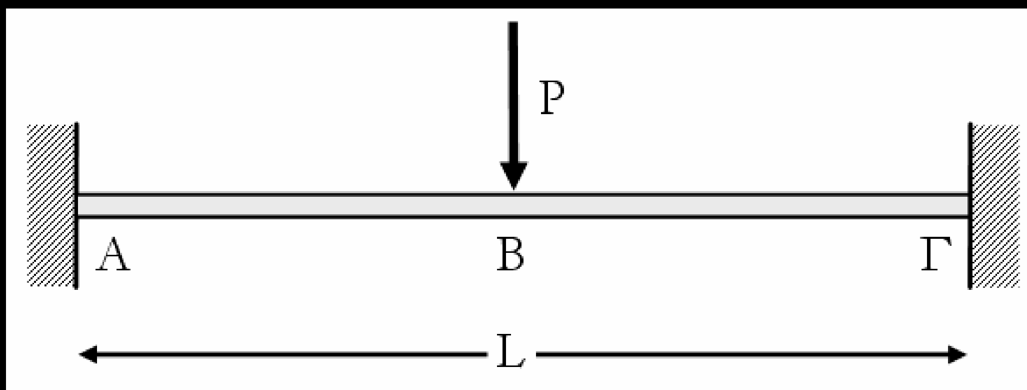
$$\Rightarrow \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{L}{6EI}$$

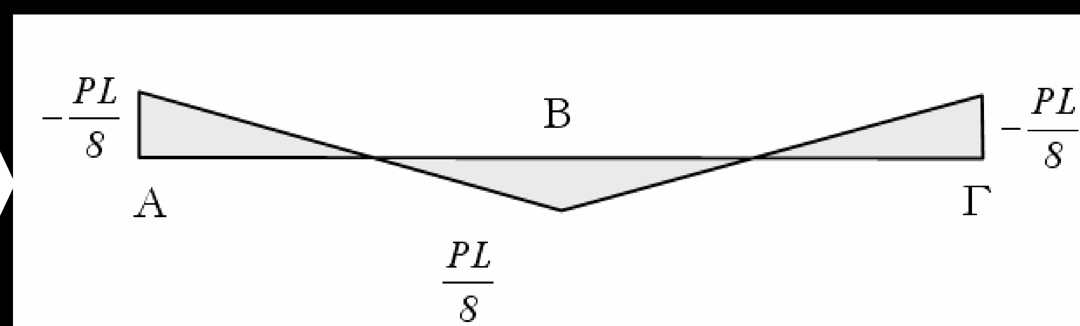
$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{L}{6EI} \\ \frac{L}{3EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{PL^2}{16EI} \\ \frac{PL^2}{16EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{L}{6EI} \\ \frac{L}{3EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{PL^2}{16EI} \\ \frac{PL^2}{16EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{PL}{8} \\ -\frac{PL}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{L}{3EI} & \dfrac{L}{6EI} \\ \dfrac{L}{3EI} & \dfrac{L}{3EI} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{PL^2}{16EI} \\ \dfrac{PL^2}{16EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{PL}{8} \\ -\dfrac{PL}{8} \end{bmatrix}$$





Θεώρημα Betti και σχέσεις αμοιβαιότητας

"το δυνατό έργο το οποίο παράγεται από μια ομάδα δυνάμεων και ροπών A σε ένα γραμμικά ελαστικό φορέα λόγω των αντίστοιχων μετακινήσεων οι οποίες προκαλούνται από μια άλλη ομάδα δυνάμεων και ροπών B ισούται με το δυνατό έργο το οποίο παράγεται από την ομάδα των δυνάμεων και ροπών B λόγω των αντίστοιχων μετακινήσεων οι οποίες προκαλούνται από την ομάδα των δυνάμεων και ροπών A"

- Θεώρημα αμοιβαιότητας των μετακινήσεων Maxwell-Betti

"η μετακίνηση δ_{ij}, μετάθεση ή στροφή, στη θέση και διεύθυνση *i* λόγω εφαρμογής μοναδιαίου φορτίου, δύναμης ή ροπής, στη θέση και διεύθυνση *j* ισούται με τη μετακίνηση δ_{ji} στη θέση και διεύθυνση *j* λόγω εφαρμογής μοναδιαίου φορτίου, δύναμης ή ροπής, στη θέση και διεύθυνση *i*"

$$\delta_{ij} = \int \frac{\delta M_i \cdot M_j}{EI} dx$$

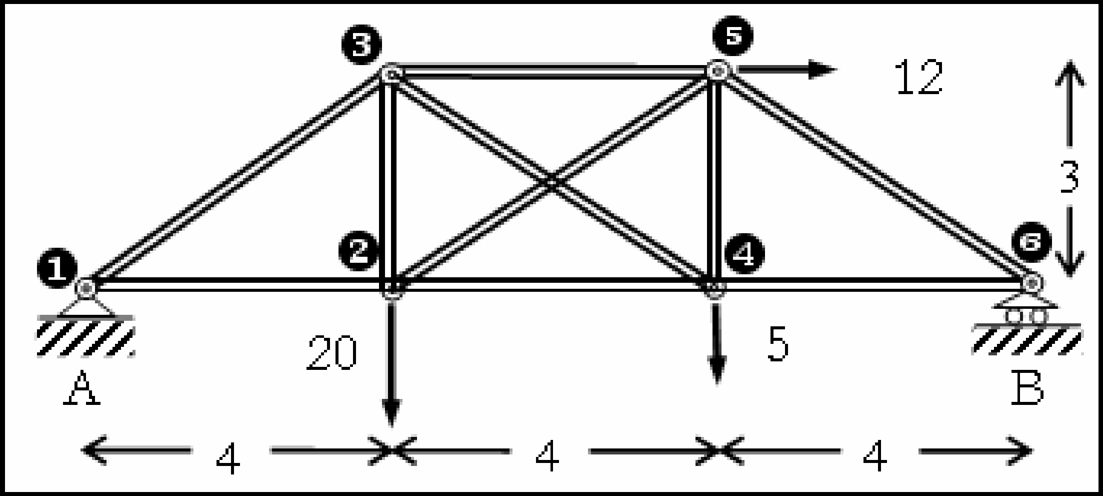
$$\delta_{ji} = \int \frac{\delta M_j \cdot M_i}{EI} dx$$

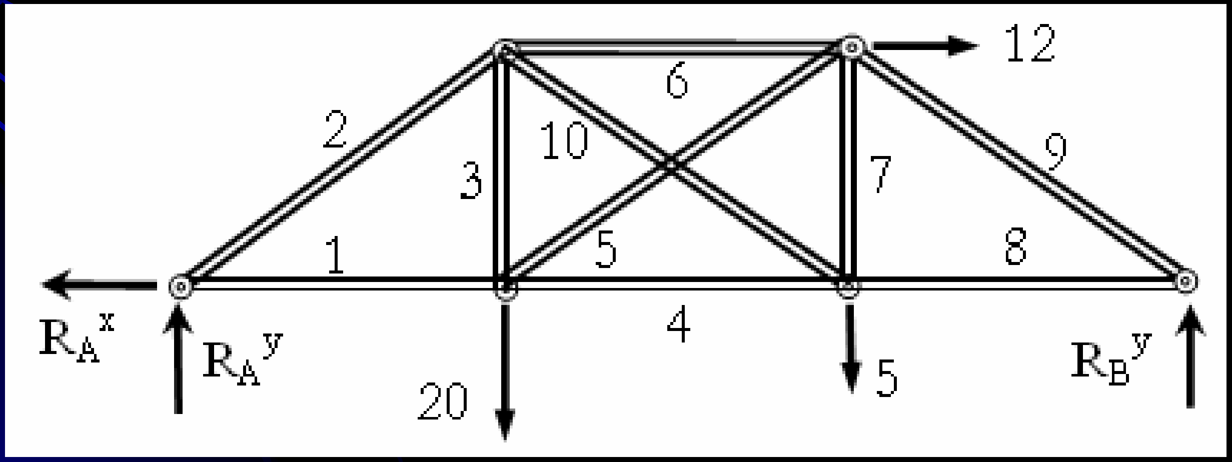
Εφαρμογές σε δικτυώματα

- με παρόμοιο τρόπο, και μεγαλύτερη ευκολία, μπορεί να επιλυθεί ένα υπερστατικό δικτύωμα
- διαφορά στον τρόπο υπολογισμού του βαθμού υπερστατικότητας:
  - *επίπεδα δικτυώματα* $N = P + A - 2 \cdot K$
  - *χωρικά δικτυώματα* : $N = P + A - 3 \cdot K$
- ένα υπερστατικό δικτύωμα μπορεί να είναι:
  - *εσωτερικά υπερστατικό*: όταν υπάρχουν περισσότερες ράβδοι από ότι απαιτούνται για να είναι εσωτερικά σταθερό
  - εξωτερικά υπερστατικό: όταν υπάρχουν περισσότερες αντιδράσεις από ότι απαιτούνται για να είναι ισοστατικός ο φορέας
  - ή και εσωτερικά και εξωτερικά υπερστατικό.
- για την επίλυση υπερστατικών δικτυωμάτων απαιτούνται επιπλέον εξισώσεις βάσει της συμβιβαστότητας των μετακινήσεων
- τα δικτυώματα έχουν μόνο αξονικές παραμορφώσεις

Παράδειγμα-3

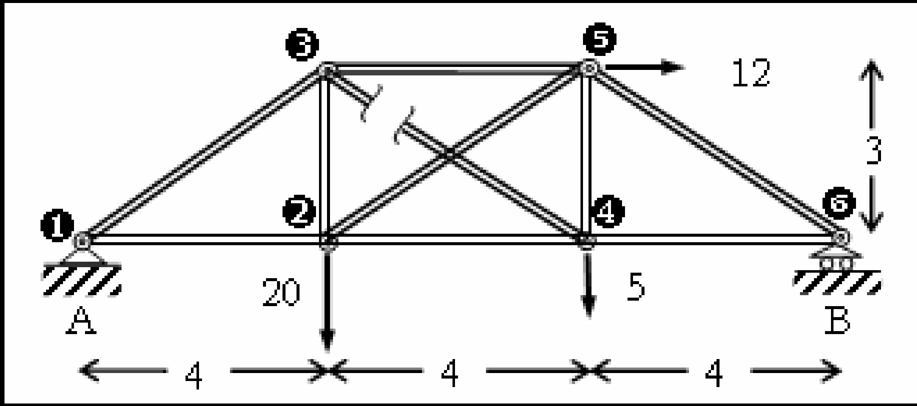
Να υπολογιστούν οι δυνάμεις των ράβδων του πιο κάτω υπερστατικού δικτυώματος, θεωρώντας ότι όλες οι ράβδοι έχουν την ίδια διατομή *A* και το ίδιο μέτρο ελαστικότητας *E*:

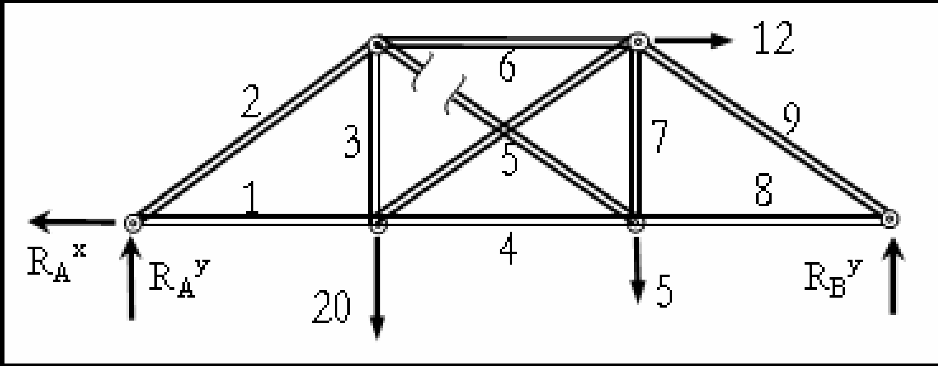




- το δικτύωμα αυτό είναι μία φορά εσωτερικά υπερστατικό

⇨ πρέπει να γίνει κατάλληλη τομή ώστε το δικτύωμα να καταστεί ισοστατικό παίρνοντας το αντίστοιχο ***σύστημα-0***

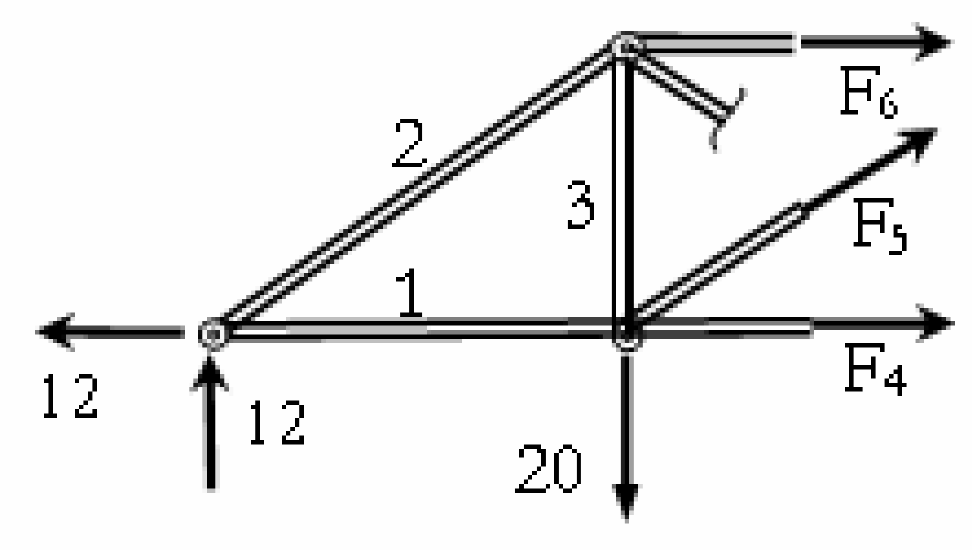




$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad \underline{R_A^x = 12}$$

$$\sum M_A^{\,z} = 0 \Rightarrow 12 \times R_B^y = 4 \times 20 + 8 \times 5 + 3 \times 12 \Rightarrow \quad \underline{R_B^y = 13}$$

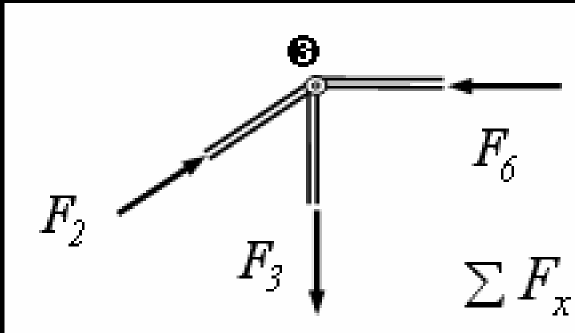
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A^y + R_B^y = 20 + 5 \Rightarrow \quad \underline{R_A^y = 12KN}$$



$$\Sigma F_y = 0 \;\; \Rightarrow \;\; F_5^y = 20 - 12 \;\; \Rightarrow F_5 \times \frac{3}{5} = 8 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{F_5 = \frac{40}{3} KN = 13.33\ KN}$$

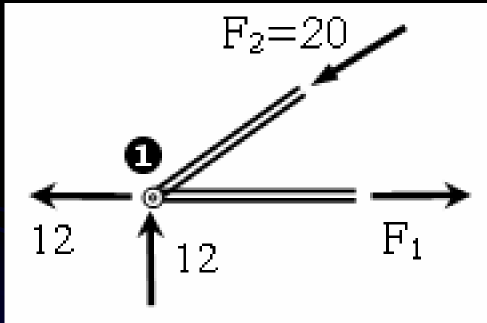
$$\Sigma M_2^{\ z} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; 3 \times F_6 = -4 \times 12 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{F_6 = -16\,KN}$$ (Άρα είναι θλιπτική η δύναμη στη ράβδο *6*)

$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; F_4 + F_5^x + F_6 = 12 \;\Rightarrow\; F_4 = 12 - \frac{40}{3}\frac{4}{5} + 16 \;\Rightarrow\; F_4 = \frac{52}{3}\ KN = 17.33\ KN$$



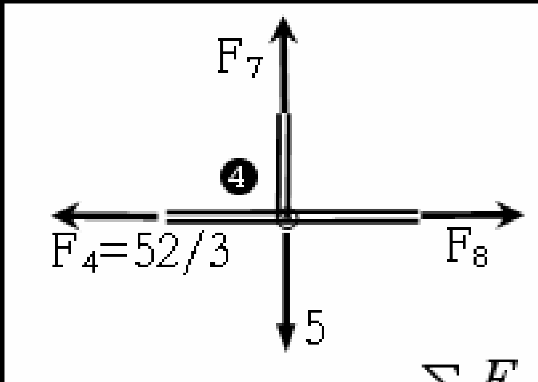
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_2 \times \frac{4}{5} = F_6 = 16 \Rightarrow \underline{F_2 = 20KN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_3 = F_2 \times \frac{3}{5} = 20 \times \frac{3}{5} \Rightarrow \underline{F_3 = 12\,KN}$$



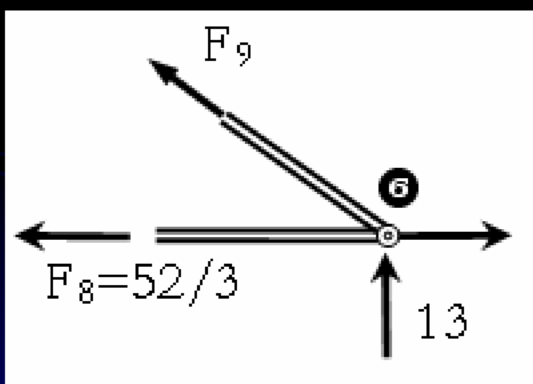
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \times \frac{4}{5} + 12 = 20 \times \frac{4}{5} + 12 = 16 + 12$$

$$\Rightarrow \underline{F_1 = 28KN}$$



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_8 = F_4 = \frac{52}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{F_8 = \frac{52}{3} KN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_7 = 5\,KN$$



$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_9 \times \frac{4}{5} + F_8 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_9 = -\frac{5}{4} F_8 = -\frac{5}{4} \times \frac{52}{3} = -\frac{65}{3}$$

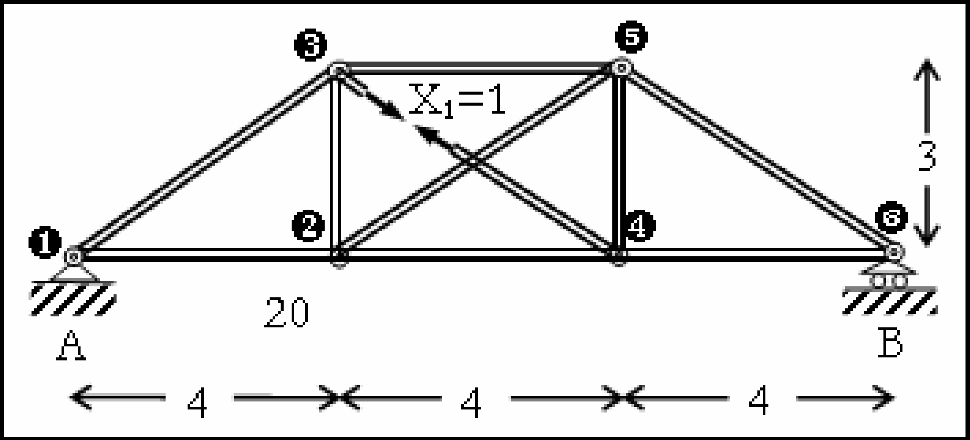
$$F_9 = -\frac{65}{3} KN = -21.67\ KN$$

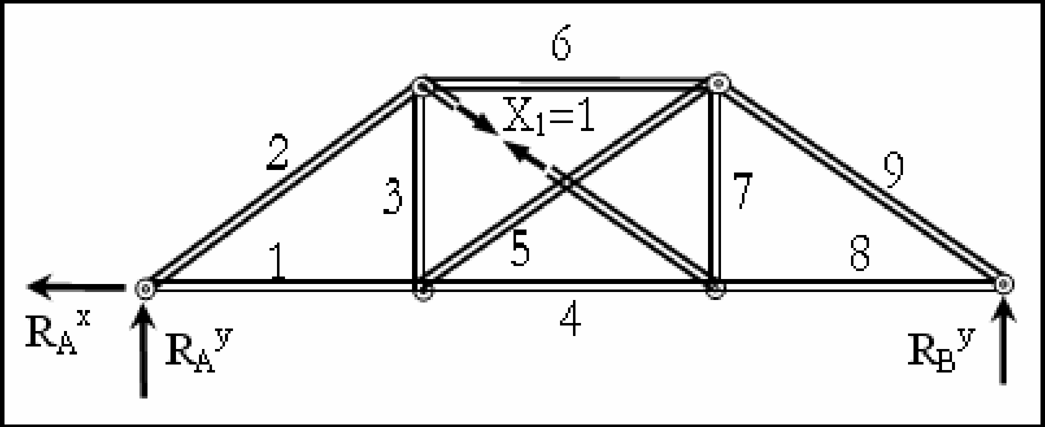
⇨ οι αξονικές δυνάμεις για όλες τις ράβδους του συστήματος-0 δίδονται συνοπτικά στο πιο κάτω πίνακα

(οι θλιπτικές δυνάμεις καθορίζονται με αρνητικό πρόσημο)

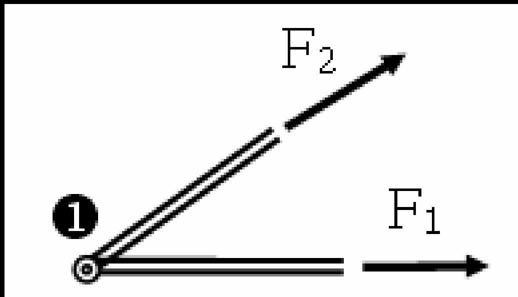
Κόμβος	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	$X_1=F_{10}$
Δύναμη [KN]	28	-20	12	52/3	40/3	-16	5	52/3	-65/3	0.0
Μήκος [m]	4	5	3	4	5	4	3	4	5	5

ακολούθως, το ***σύστημα-1***, δηλαδή το ισοστατικό δικτύωμα χωρίς τα εξωτερικά φορτία, πρέπει να επιλυθεί για μοναδιαία αξονική δύναμη στη ράβδο *10*, της οποίας η αξονική δύναμη έχει επιλεχθεί σαν το υπερστατικό μέγεθος $X_1=F_{10}$

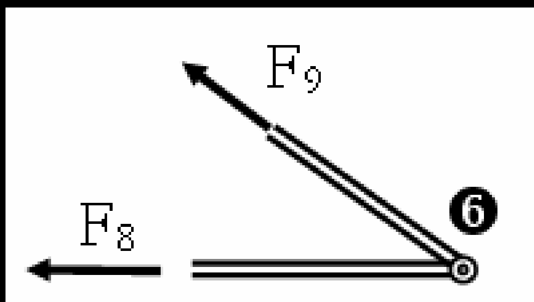




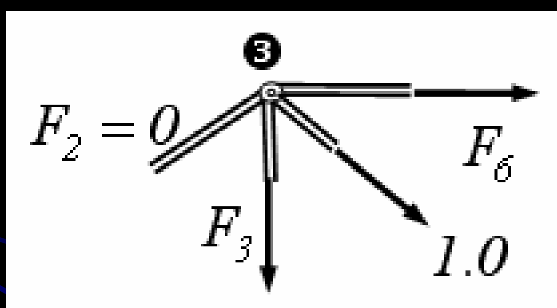
$$F_{10} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{R_A^x = 0} \quad \underline{R_A^y = 0} \quad \underline{R_B^y = 0}$$



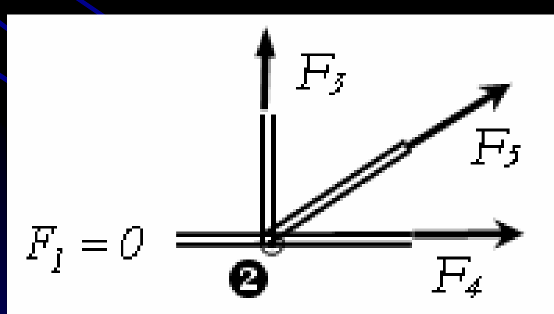
$$\Rightarrow \quad \underline{F_1 = 0} \quad \text{και} \quad \underline{F_2 = 0}$$



$$\Rightarrow \quad \underline{F_8 = 0} \quad \text{και} \quad \underline{F_9 = 0}$$



$$\Rightarrow \quad \underline{F_6 = -0.8} \quad \text{και} \quad \underline{F_3 = -0.6}$$



$$\Rightarrow \quad \underline{F_4 = -0.8} \quad \text{και} \quad \underline{F_5 = 1.0}$$

- *λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία*

$$\Rightarrow \quad \underline{F_7 = -0.6}$$

⇨ οι αξονικές δυνάμεις για όλες τις ράβδους του συστήματος-1 δίδονται συνοπτικά στο πιο κάτω πίνακα

(οι θλιπτικές δυνάμεις καθορίζονται με αρνητικό πρόσημο)

Κόμβος	δF_1	δF_2	δF_3	δF_4	δF_5	δF_6	δF_7	δF_8	δF_9	$X_1=\delta F_{10}$
Δύναμη [N]	0	0	-0.6	-0.8	1.0	-0.8	-0.6	0	0	1.0

$$\Rightarrow \quad \delta_{10} = \delta F_1 \cdot \frac{F_1}{AE} \cdot L_1 + \delta F_2 \cdot \frac{F_2}{AE} \cdot L_2 + \delta F_3 \cdot \frac{F_3}{AE} \cdot L_3 + \delta F_4 \cdot \frac{F_4}{AE} \cdot L_4 + \delta F_5 \cdot \frac{F_5}{AE} \cdot L_5 + \delta F_6 \cdot \frac{F_6}{AE} \cdot L_6 + \delta F_7 \cdot \frac{F_7}{AE} \cdot L_7 + \delta F_8 \cdot \frac{F_8}{AE} \cdot L_8 + \delta F_9 \cdot \frac{F_9}{AE} \cdot L_9$$

$$\Rightarrow \delta_{10} = \frac{1}{AE}\left(-0.6 \cdot 12{,}000 \cdot 3 - 0.8 \cdot \frac{52{,}000}{3} \cdot 4 + 1 \cdot \frac{40{,}000}{3} \cdot 5 - 0.8 \cdot (-16{,}000) \cdot 4 - 0.6 \cdot 5{,}000 \cdot 3\right)$$

$$\Rightarrow \delta_{10} = \frac{31{,}800}{AE}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{AE}\left((-0.6)\cdot(-0.6)\cdot 3 + (-0.8)\cdot(-0.8)\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 5 + (-0.8)\cdot(-0.8)\cdot 4 + (-0.6)\cdot(-0.6)\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 5\right)$$

$$\Rightarrow \delta_{11} = \frac{17.28}{AE}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$X_1 = F_{10} = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{31,800}{AE}}{\frac{17.28}{AE}} = -1,840\,N = -1.84\,KN$$

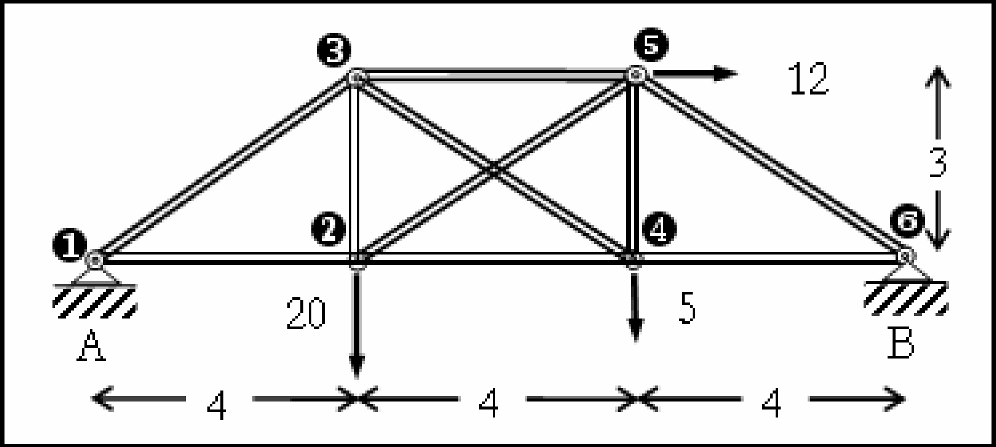
$$X_1 = F_{10} = -1.84\,KN$$

- ⇨ οι συνολικές αξονικές δυνάμεις για όλες τις ράβδους δίδονται συνοπτικά στο πιο κάτω πίνακα

(οι θλιπτικές δυνάμεις καθορίζονται με αρνητικό πρόσημο)

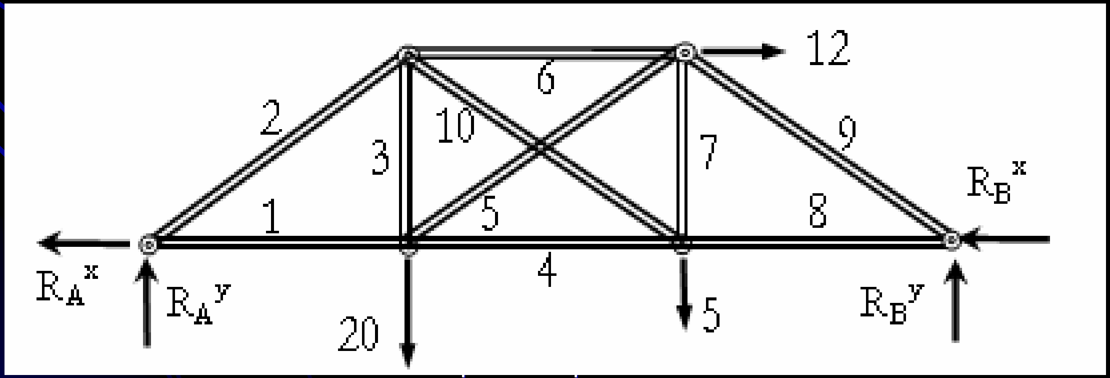
Κόμβος	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
Δύναμη [KN]	28.0	-20.0	13.1	18.8	11.5	-14.5	6.1	17.3	-21.7	-1.8

Αν το δικτύωμα στηριζόταν σε δύο αρθρώσεις



⇨ δύο φορές υπερστατικό

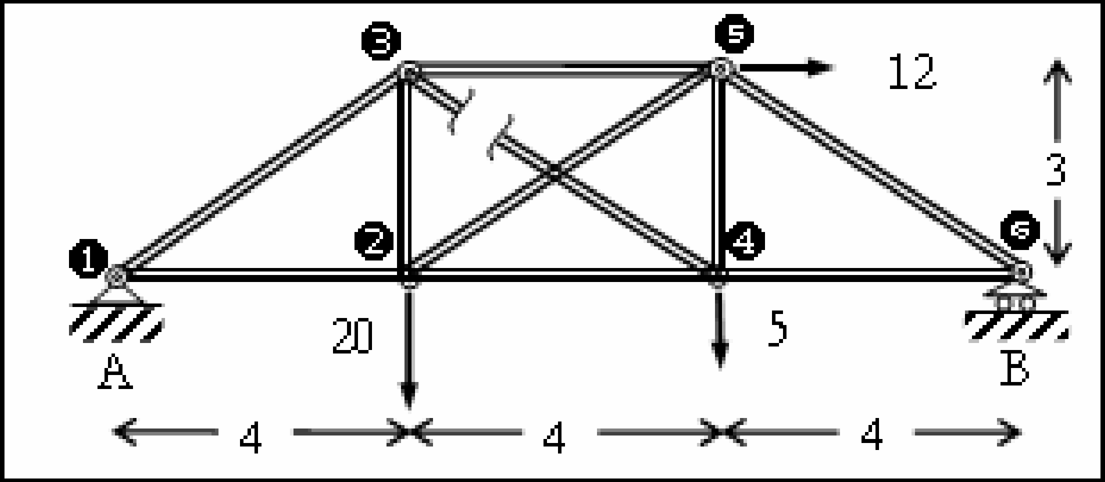
- μία φορά εξωτερικά υπερστατικό
- μία φορά εσωτερικά υπερστατικό

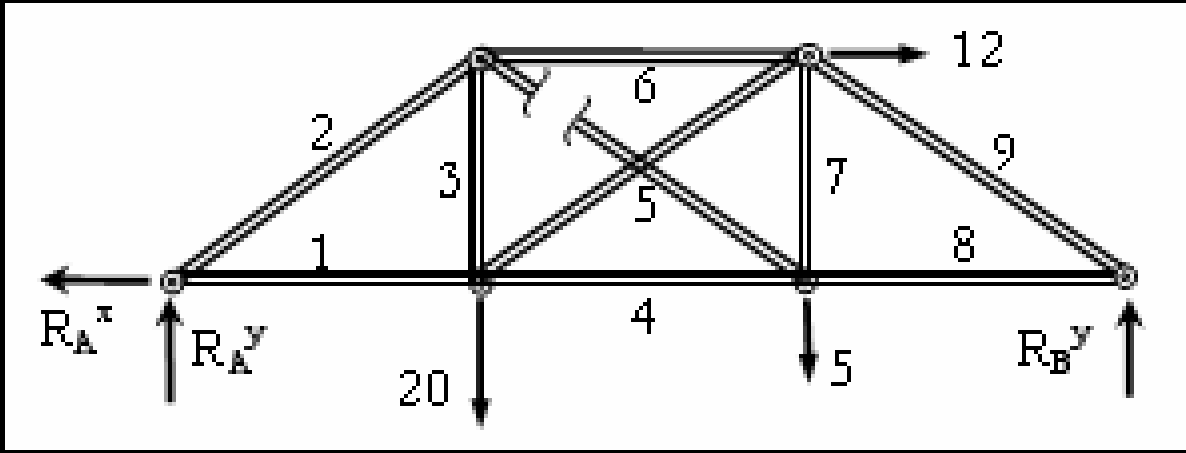


σύστημα-0

$$X_1 = F_{10}$$

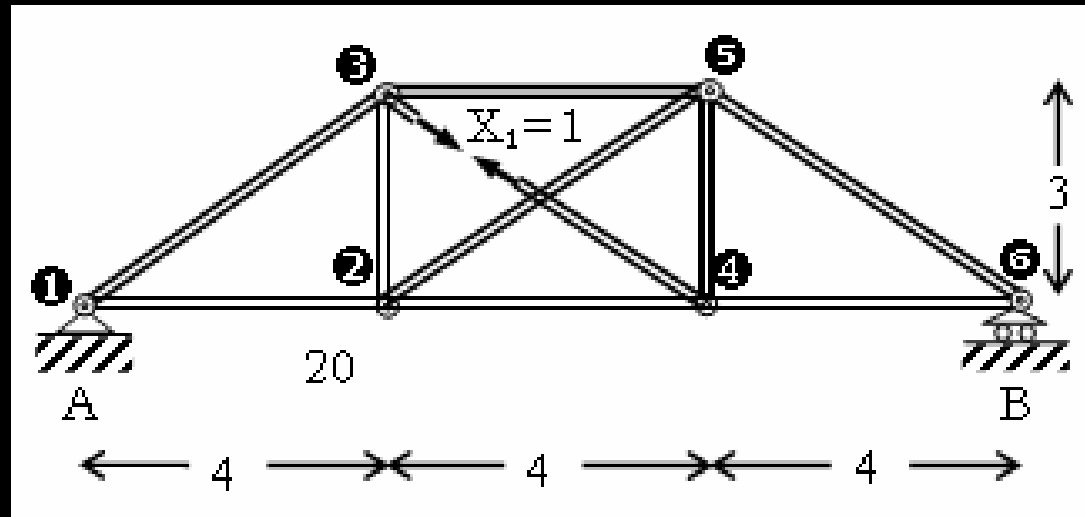
$$X_2 = R_B^x$$

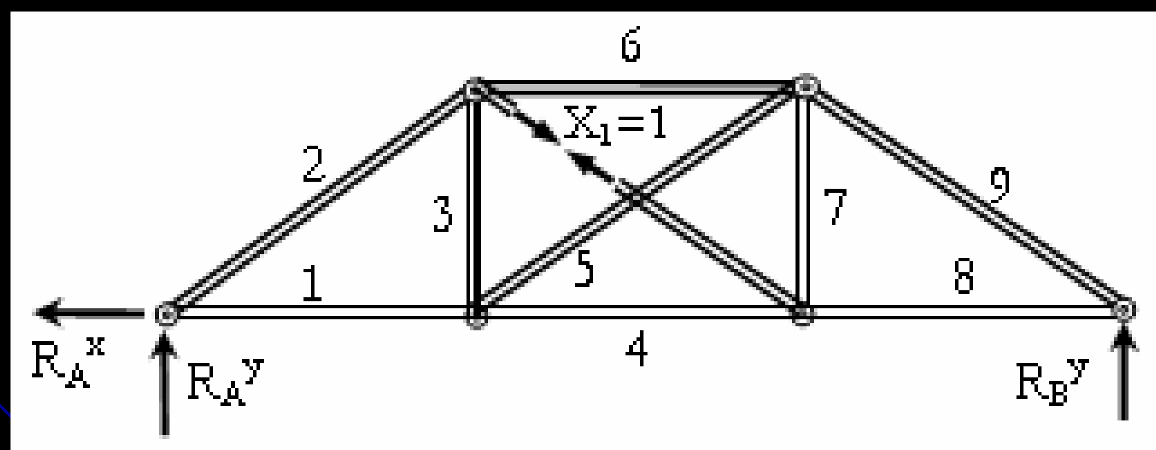




Κόμβος	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	$X_1 = F_{10}$
Δύναμη [KN]	28	-20	12	52/3	40/3	-16	5	52/3	-65/3	0.0
Μήκος [m]	4	5	3	4	5	4	3	4	5	5

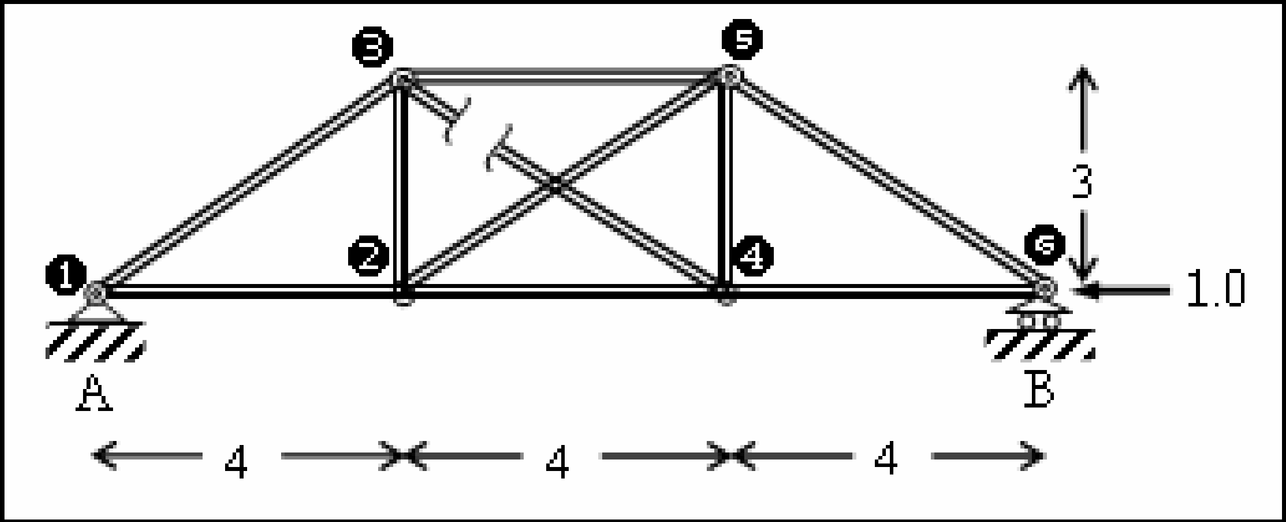
σύστημα-1:

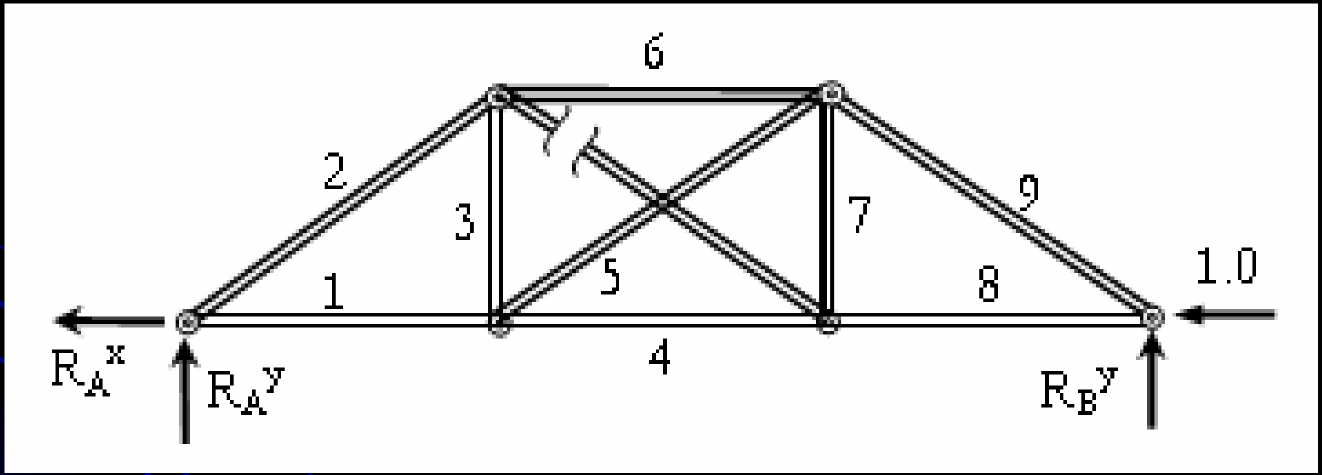




Κόμβος	δF_1	δF_2	δF_3	δF_4	δF_5	δF_6	δF_7	δF_8	δF_9	$X_1=\delta F_{10}$
Δύναμη [N]	0	0	-0.6	-0.8	1.0	-0.8	-0.6	0	0	1.0

σύστημα-2:





Δύναμη [N] Συστήματος-2	-1.0	0	0	-1.0	0	0	0	-1.0	0	0

Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μήκος [m]	4.00	5.00	3.00	4.00	5.00	4.00	3.00	4.00	5.00	5.00
Δύναμη [KN] Συστήματος'0	28	-20	12	52/3	40/3	-16	5	52/3	-65/3	0.0
Δύναμη [N] Συστήματος-1	0	0	-0.6	-0.8	1.0	-0.8	-0.6	0	0	1.0
Δύναμη [N] Συστήματος-2	-1.0	0	0	-1.0	0	0	0	-1.0	0	0

- συνθήκες συμβιβαστότητας των παραμορφώσεων και μετακινήσεων :

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0$$

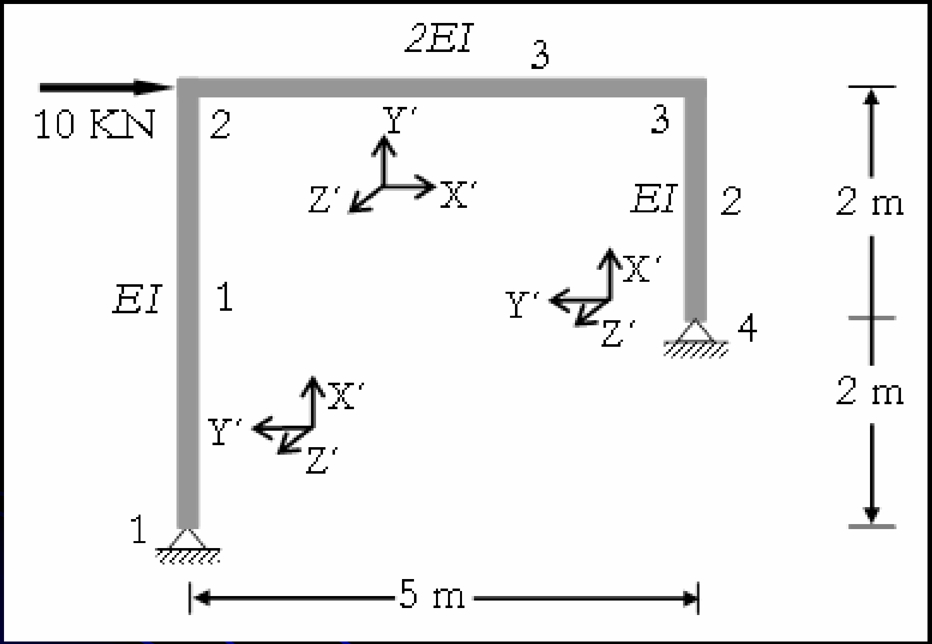
$$\begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Εντολές Matlab:

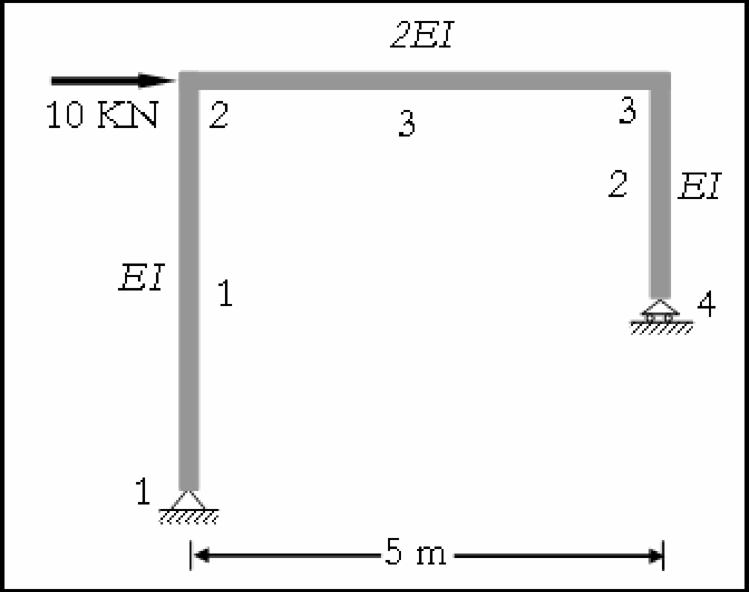
```
F0 = [28 -20 12 52/3 40/3 -16 5 52/3 -65/3  0]' * 1000
F1 = [0 0 -0.6 -0.8 1 -0.8 -0.6 0 0 1]'
F2= [ -1 0 0 -1 0 0 0 -1 0 0]'
L= [4 5 3 4 5 4 3 4 5 5 ]'

d10=0; d11=0; d12=0;  d20=0; d21=0; d22=0;

for i=1:10
  d10 = d10 + L(i) * F1(i) * F0(i) ;
  d11 = d11 + L(i) * F1(i) * F1(i);
  d12 = d12 + L(i) * F1(i) * F2(i);
  d20 = d20 + L(i) * F2(i) * F0(i) ;
  d21 = d21 + L(i) * F2(i) * F1(i);
  d22 = d22 + L(i) * F2(i) * F2(i);
end

A=[ d11 d12
    d21 d22]

b = [d10 ; d20]

X = -inv(A)*b

F=F0+F1*X(1)+F2*X(2)
```

Δύναμη [KN]	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
	5.51	-20.0	15.6	-0.4	7.3	-11.2	8.6	-5.2	-21.7	-1.8

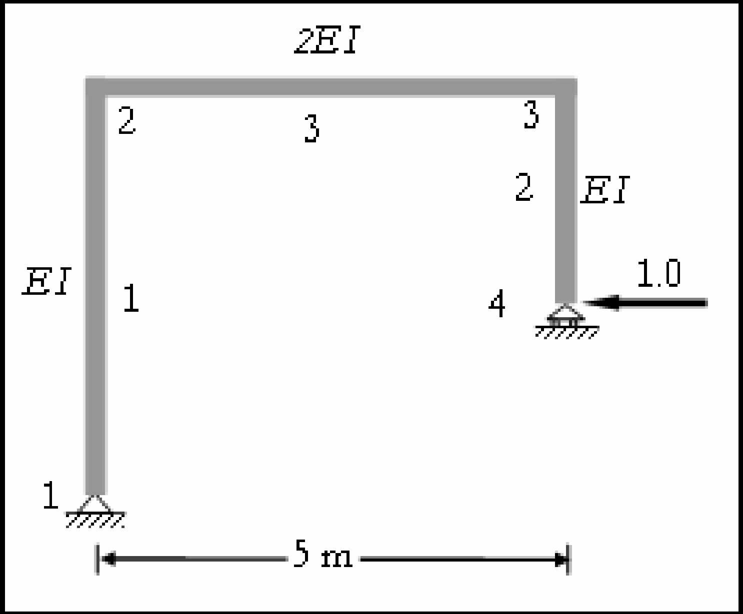
Εφαρμογές σε πλαίσια



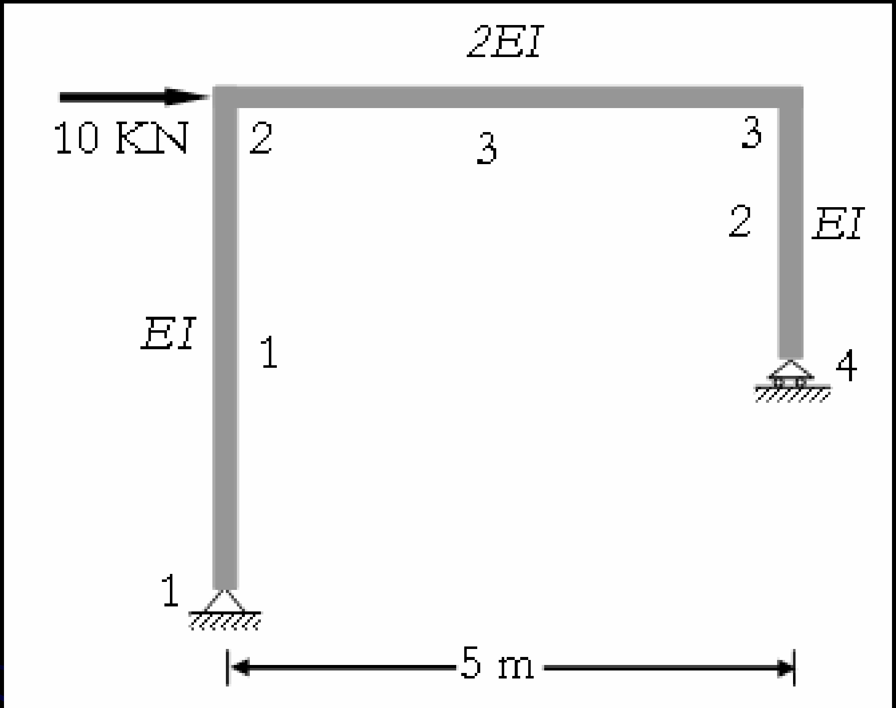
σύστημα-0:

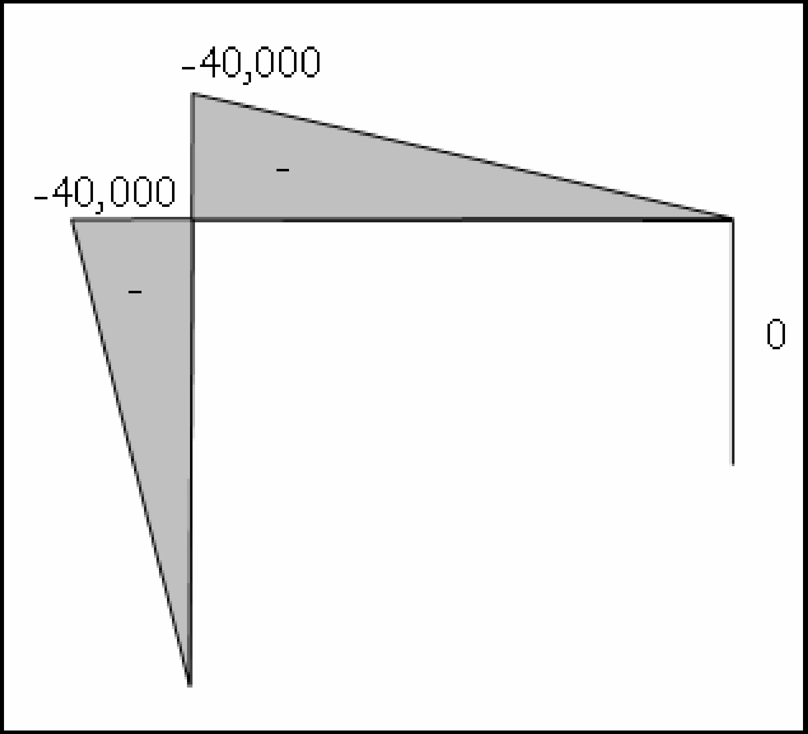


σύστημα-1:

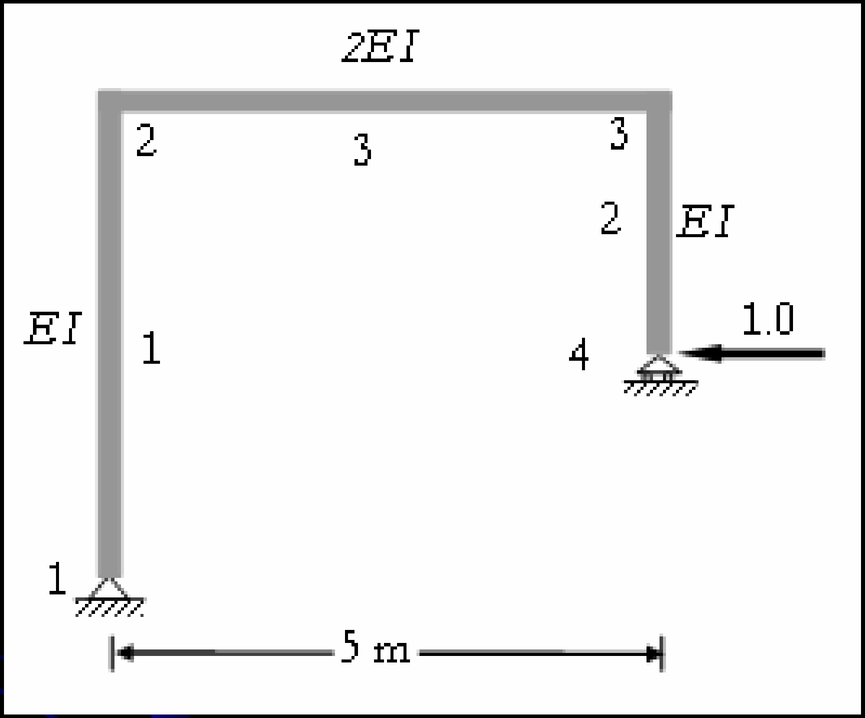


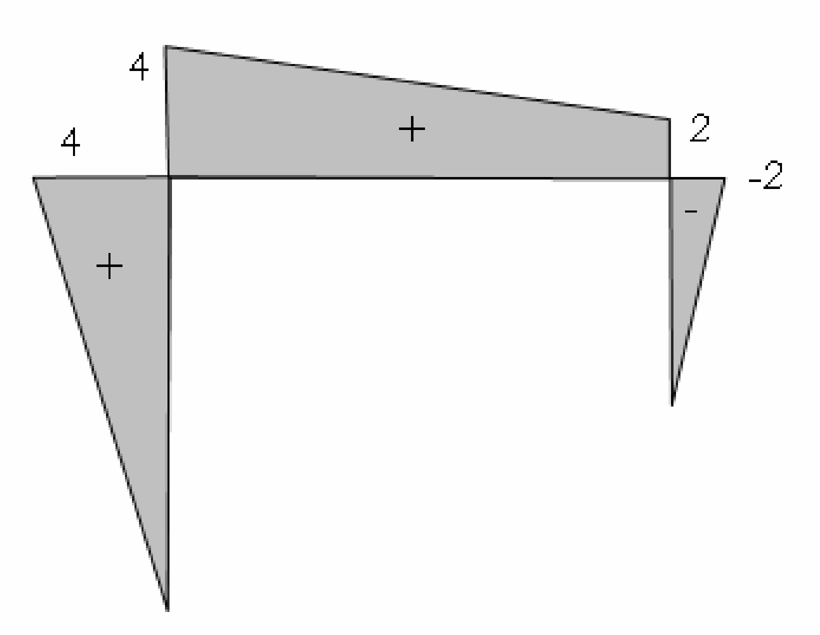
σύστημα-0:

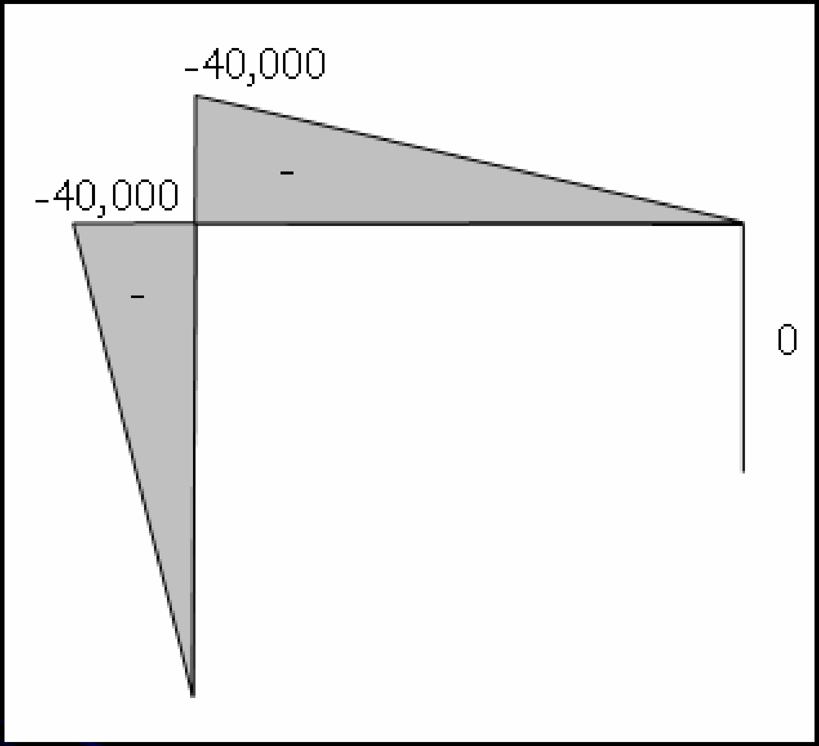


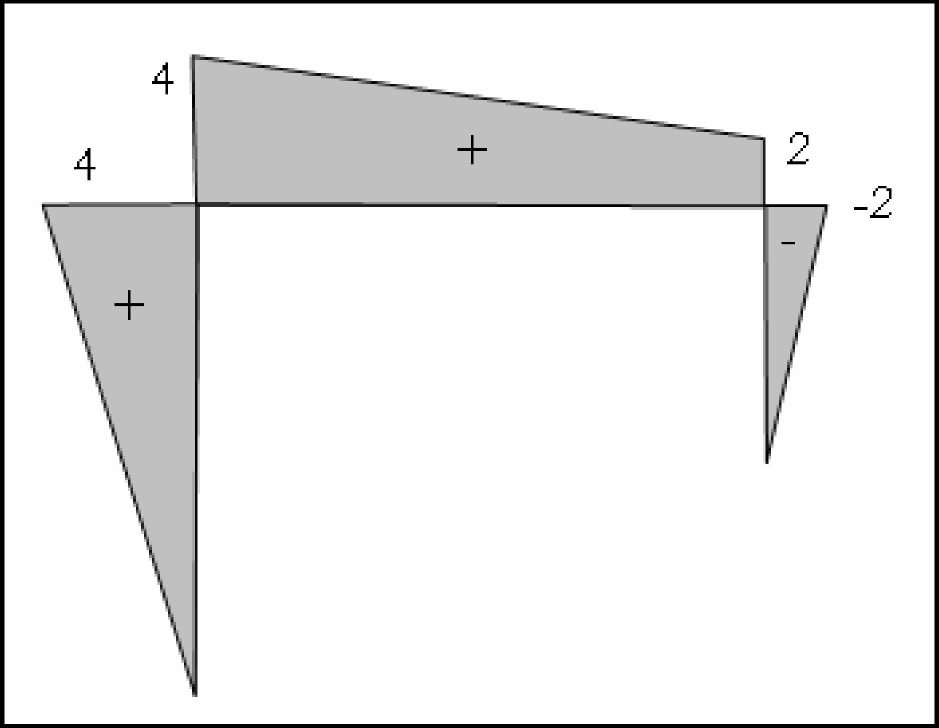


σύστημα-1:

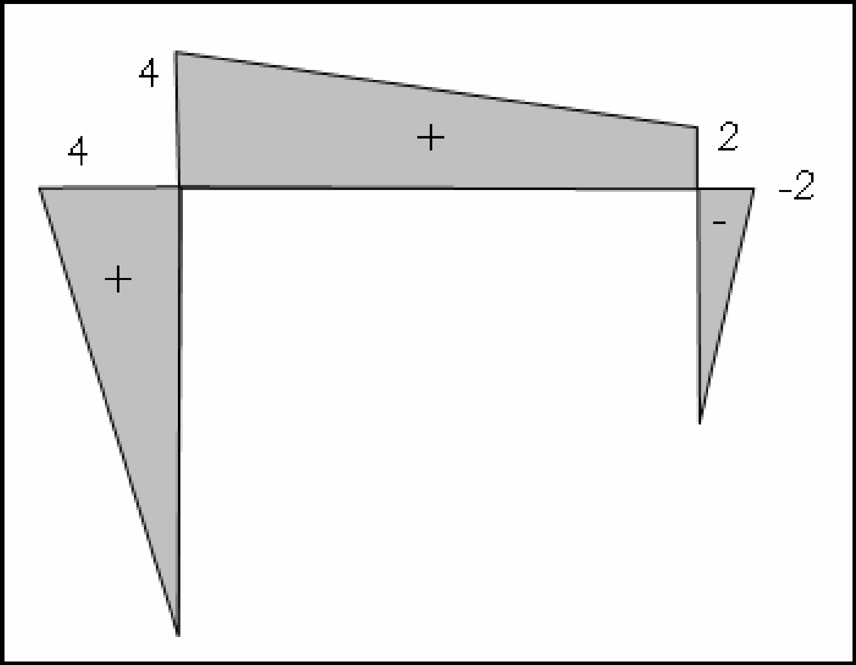


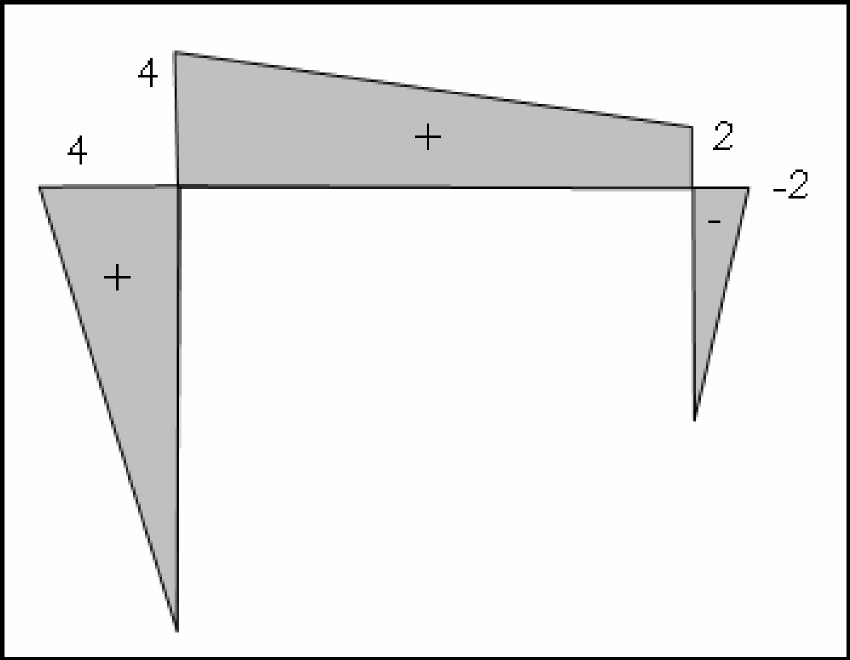






$$\delta_{10} = \frac{1}{3}\cdot 4\cdot(4)\cdot\left(\frac{-40,000}{EI}\right) + \frac{1}{6}\cdot 5\cdot\left\{\left(\frac{-40,000}{2EI}\right)\cdot(2\cdot 4+2)\right\} = -\frac{213,333}{EI} - \frac{166,667}{EI} = -\frac{380,000}{EI}$$





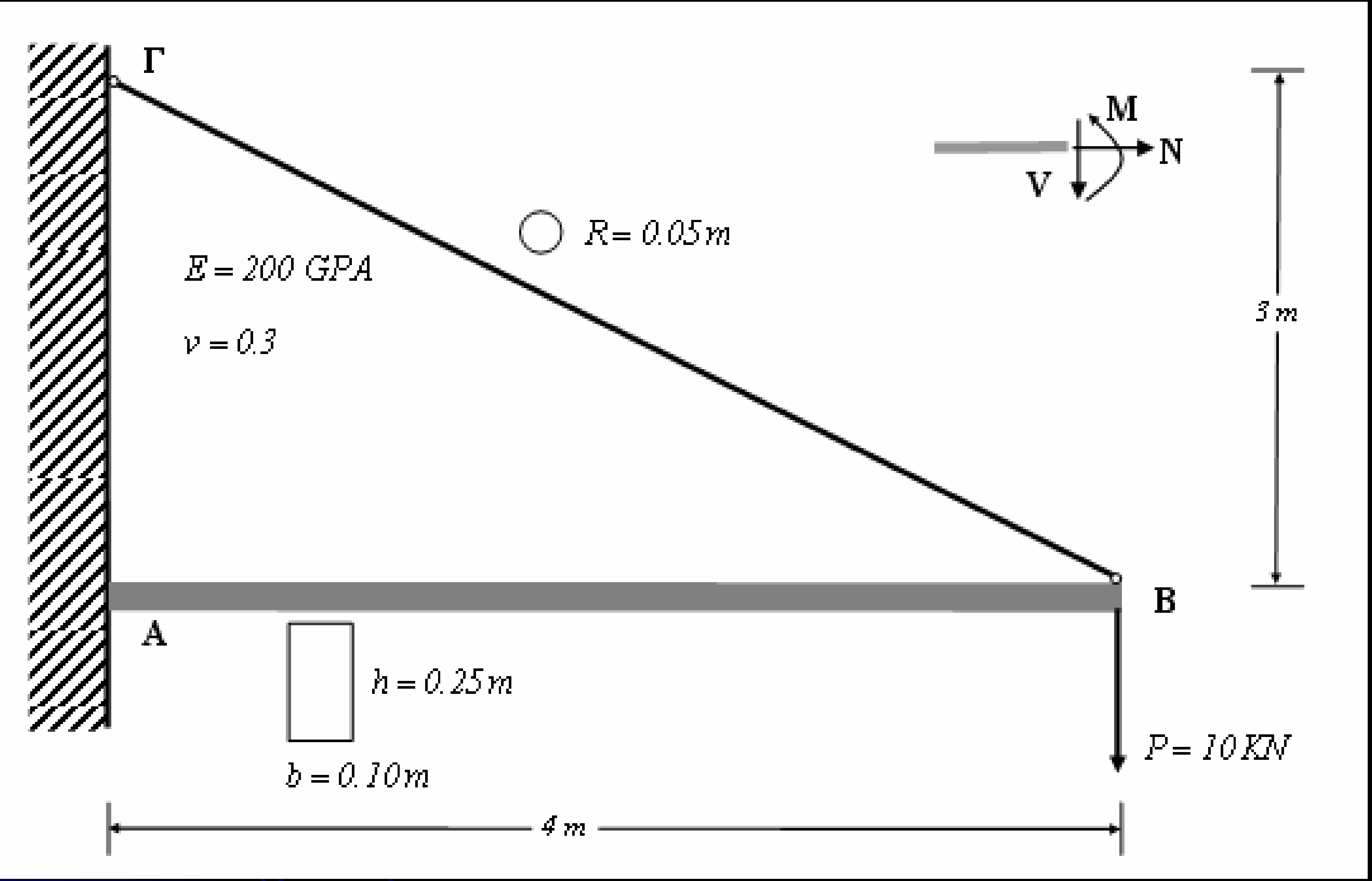
$$\delta_{11} = \frac{1}{3}\cdot 4\cdot(4)\cdot\left(\frac{4}{EI}\right)+\frac{1}{6}\cdot 5\cdot\left\{\left(\frac{4}{2EI}\right)\cdot(2\cdot 4+2)+\left(\frac{2}{2EI}\right)\cdot(4+2\cdot 2)\right\}+\frac{1}{3}\cdot 2\cdot(-2)\cdot\left(\frac{-2}{EI}\right)$$

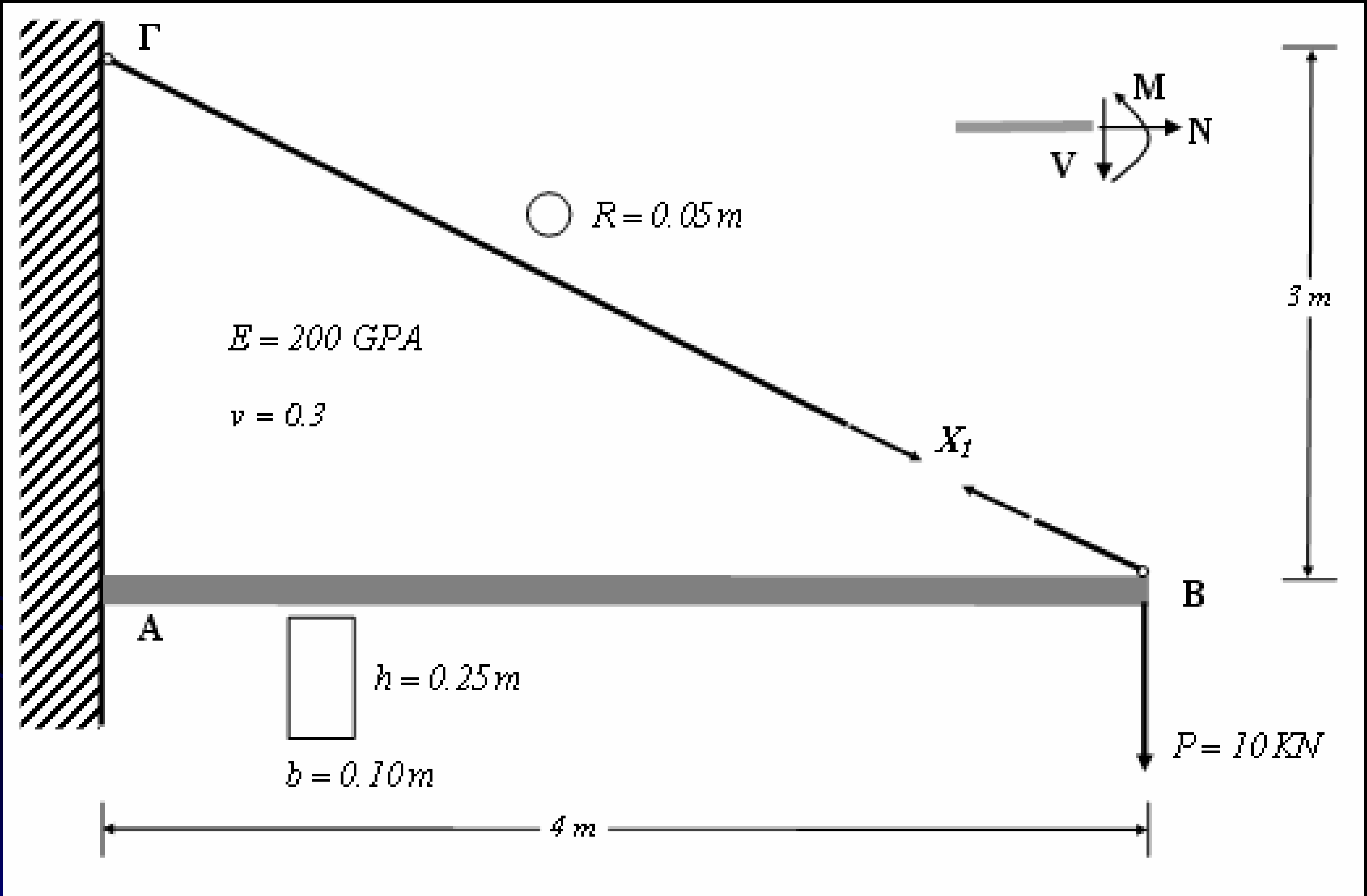
$$\Rightarrow \quad \delta_{11} == \frac{21.333}{EI}+\frac{23.333}{EI}+\frac{2.667}{EI}=\frac{47.333}{EI}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-\dfrac{380,000}{EI}}{\dfrac{47.333}{EI}} = 8,028\,N = 8.028\,KN$$

Εφαρμογές σε σύνθετους φορείς





Γ
M
N
V
R = 0.05m
3 m
E = 200 GPA
v = 0.3
X1
B
A
h = 0.25m
P = 10KN
b = 0.10m
4 m

Παραμορφώσεις από άλλα, εκτός φορτίων, αίτια

- Θερμοκρασιακές μεταβολές
  - ομοιόμορφη καθ’ ύψος της διατομής:
    - ⇨ μεταβολή του μήκους του στοιχείου (επιμήκυνση ή βράχυνση)
  - διαφορετική στα δύο πέλματα ενός μέλους
    - ⇨ καμπτικής μορφής παραμορφώσεις και σχετικές στροφές των διατομών
- Κατασκευαστικές ατέλειες και σφάλματα
- Διαφορικές καθιζήσεις

Εφαρμογή της ΑΔΕ για θερμοκρασιακές μεταβολές

- Για να υπολογιστούν οι μετακινήσεις ενός σημείου λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ΑΔΕ εφαρμόζοντας μοναδιαίο δυνατό φορτίο στο σημείο και την διεύθυνση της ζητούμενης μετακίνησης:

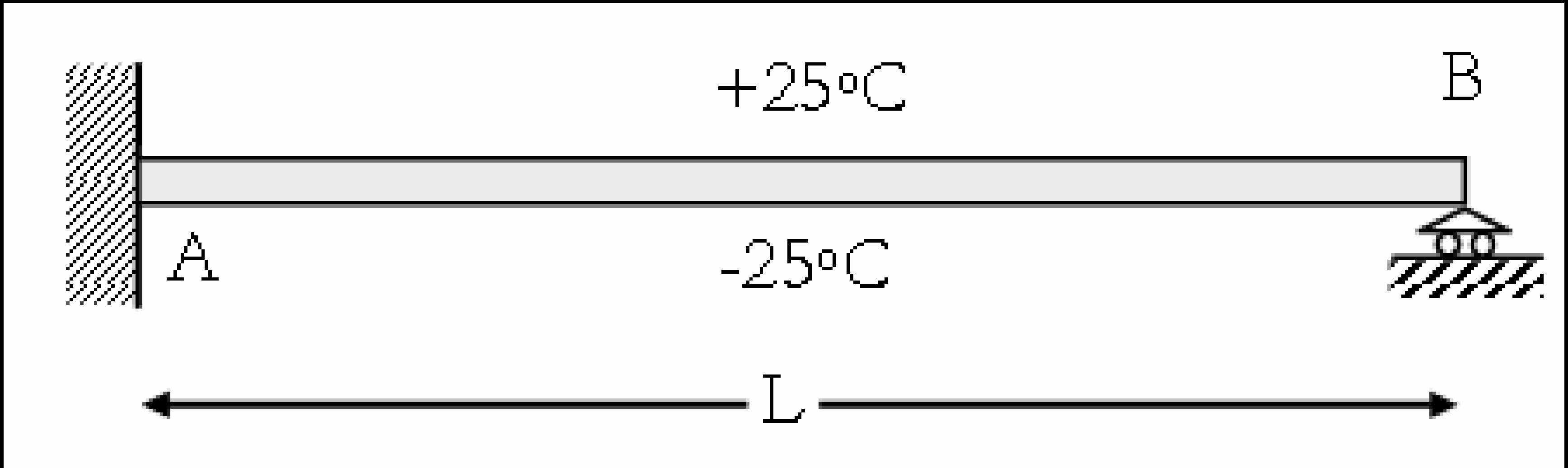
  - ελαστική δυνατή ενέργεια λόγω *ομοιόμορφης* μεταβολής της θερμοκρασίας:

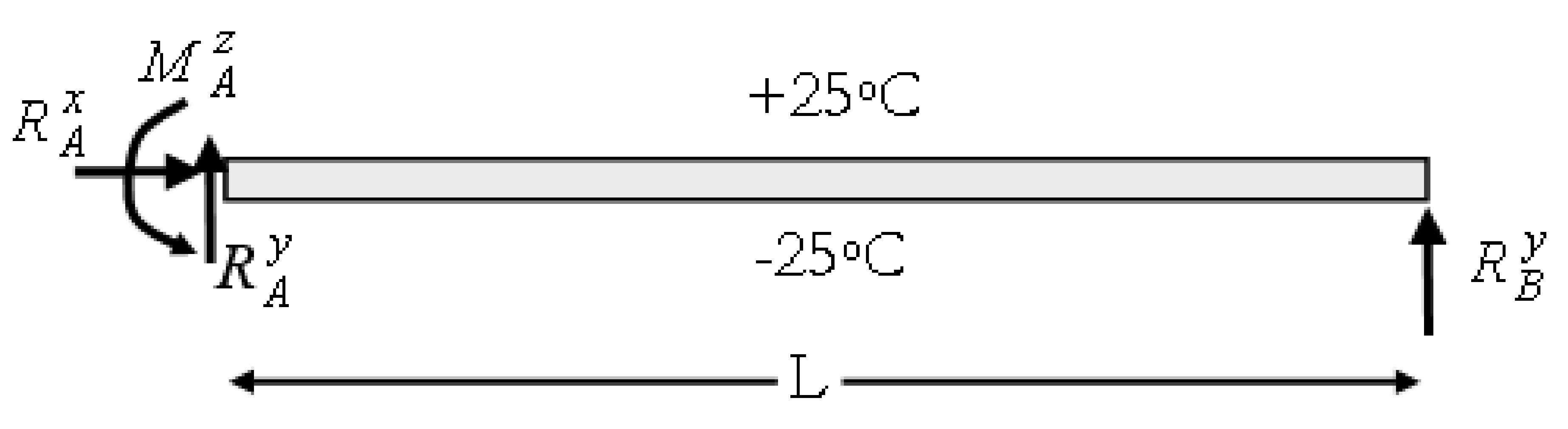
$$\delta U = \int_0^L \delta N \cdot \alpha \cdot \Delta T \, dx$$

  - ελαστική δυνατή ενέργεια λόγω *διαφορικής* μεταβολής της θερμοκρασίας:

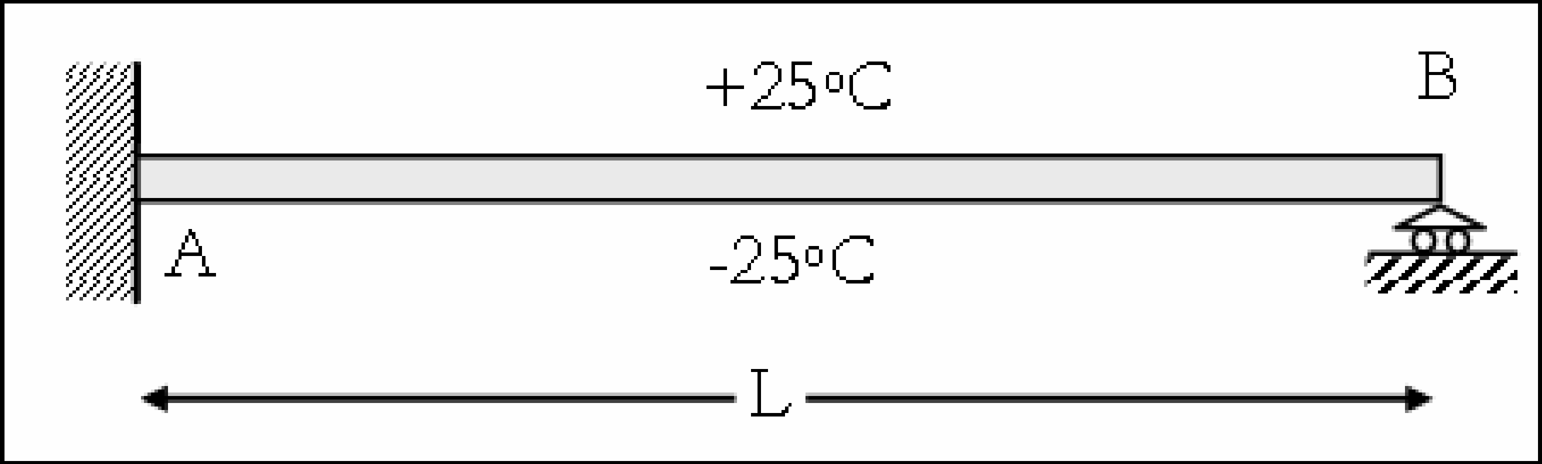
$$\delta U = \int_0^L \delta M_z \cdot \frac{\alpha \cdot \Delta T}{h} dx \qquad \delta U = \int_0^L \delta M_y \cdot \frac{\alpha \cdot \Delta T}{b} dx$$

Θερμοκρασιακές μεταβολές

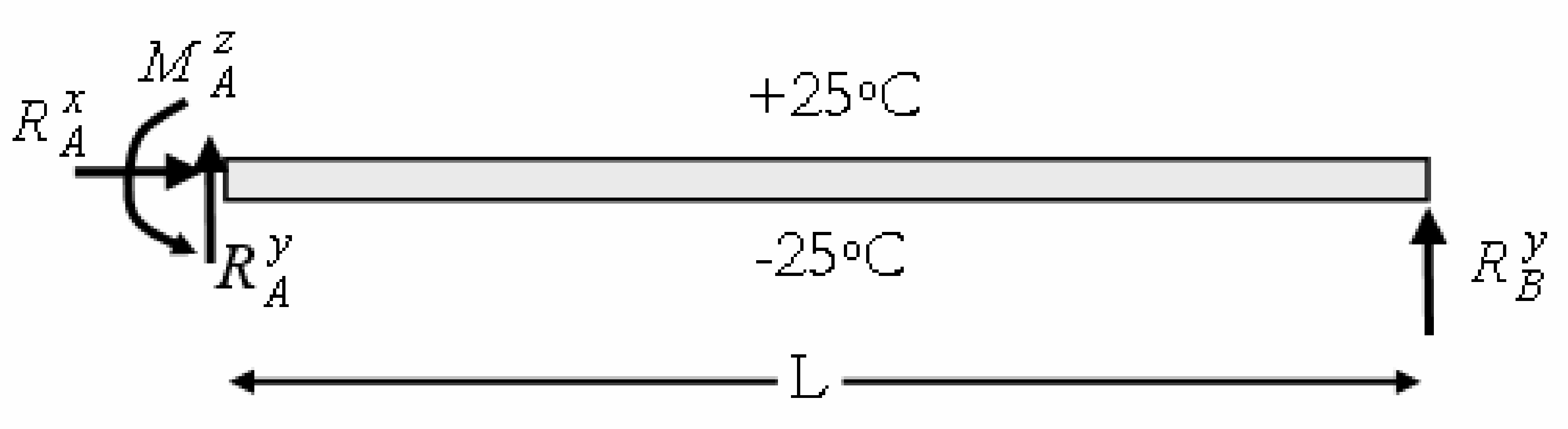


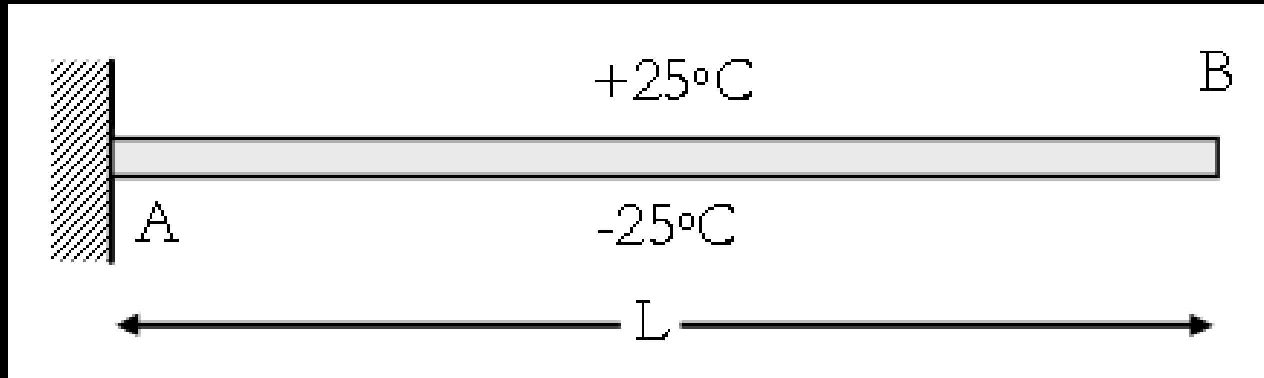


Θερμοκρασιακές μεταβολές

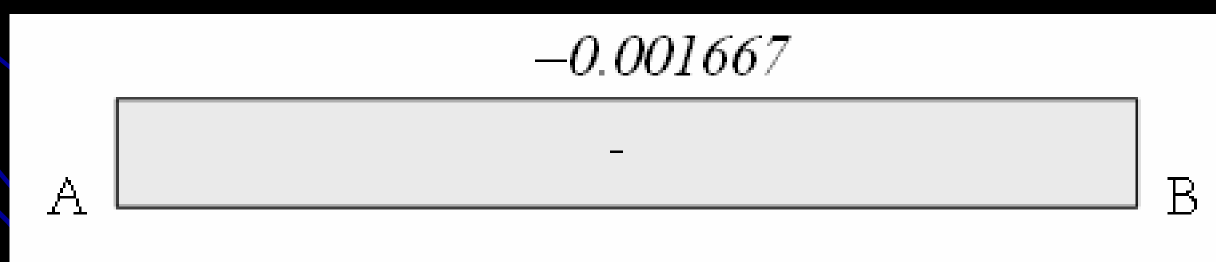


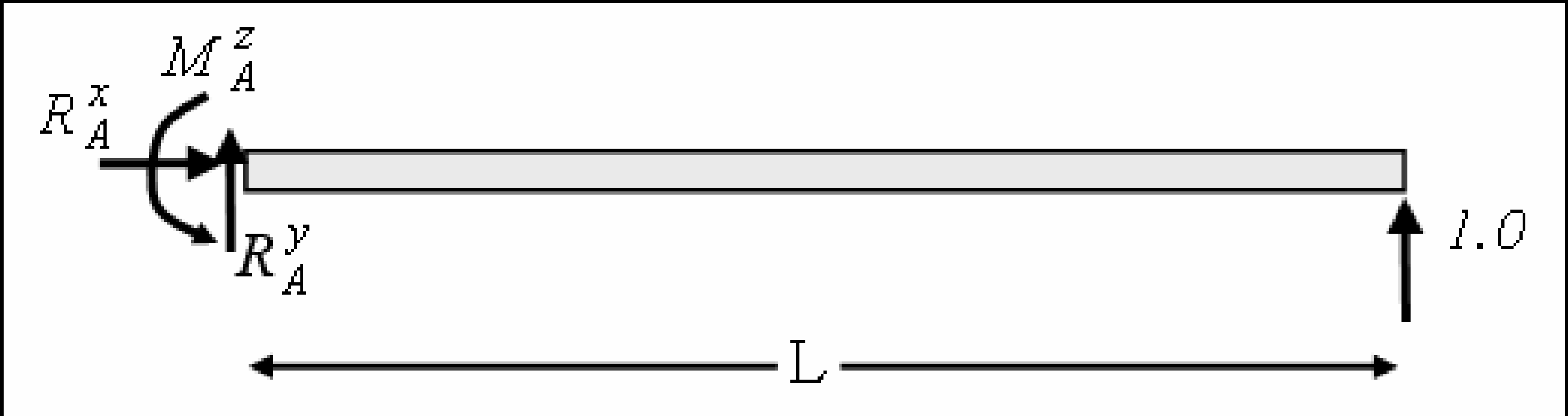
$E = 200GPA$ $h = 0.30m$ $b = 0.12m$



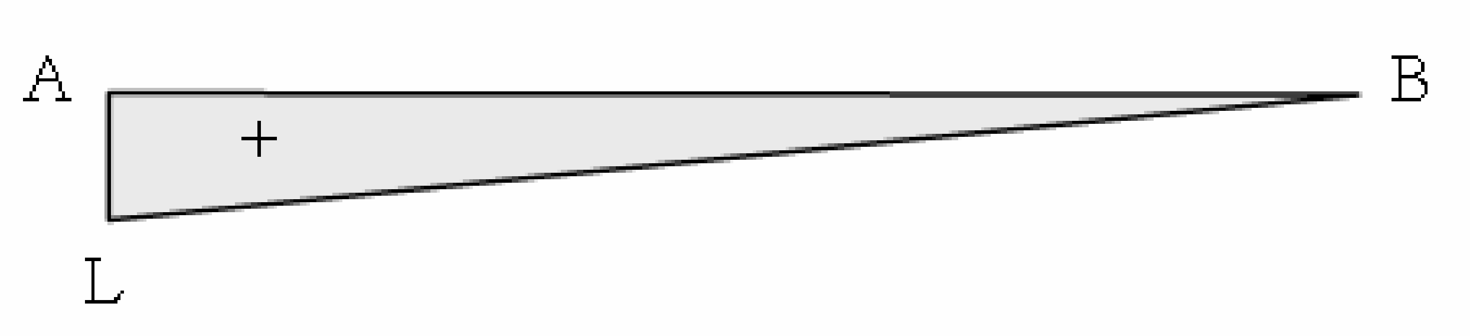


$$\frac{\alpha \cdot \Delta T}{h} = \frac{10^{-5} \cdot 50}{0.30} = 0.001667$$





M_A^z
R_A^x
R_A^y
1.0
L



A
B
+
L

$$\delta_{10}=\int_0^L \delta M_z\cdot\frac{\alpha\cdot\Delta T}{h}dx=\frac{1}{2}\cdot L\cdot\frac{\alpha\cdot\Delta T}{h}\cdot L=-\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0.001667\cdot 10=-0.008333\,m$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{3\cdot E\cdot I}\cdot 10\cdot 10\cdot 10=\frac{1000}{3\cdot E\cdot I}=\frac{1000}{3\cdot\left(200\cdot 10^9\right)\cdot\left(\frac{0.3^3\cdot 0.12}{12}\right)}$$

$$\Rightarrow\quad \delta_{11}=\frac{1000}{3\cdot\left(200\cdot 10^9\right)\cdot\left(2.7\cdot 10^{-4}\right)}=6.173\cdot 10^{-6}\,m/N$$

$$\delta_{10}+\delta_{11}\cdot X_1=0$$

$$\Rightarrow\quad X_1=-\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}=-\frac{-0.008333}{6.173\cdot 10^{-6}}=1350\,N=1.35\,KN$$

Διαφορικές καθιζήσεις

- οι κατασκευές, με το σχετικά μεγάλο βάρος τους, δεν εδράζονται πάνω σε απολύτως απαραμόρφωτη βάση, αλλά θεμελιώνονται σε παραμορφώσιμο έδαφος το οποίο μπορεί να παρουσιάσει καθιζήσεις

  ⇨ εξωτερικοί καταναγκασμοί λόγω διαφορικών μετακινήσεων (καθιζήσεων) των στηρίξεων μιας κατασκευής

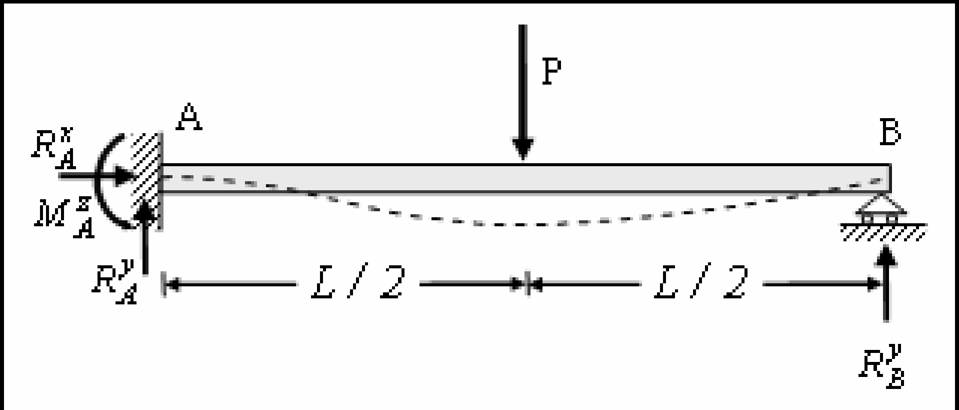
  - ισοστατικοί φορείς
    - ⇨ αν και οι διαφορικές καθιζήσεις προκαλούν μετακινήσεις και στροφές των μελών της κατασκευής γενικά δεν προκαλούν παραμορφώσεις ή εντάσεις
    - ο υπολογισμός των μετακινήσεων μπορεί να γίνει εύκολα με την ΑΔΕ εφαρμόζοντας μοναδιαίο φορτίο στην κατεύθυνση της ζητούμενης μετακίνησης ως δυνατή φόρτιση αφού η ελαστική δυνατή ενέργεια ισούται με μηδέν εφόσον δεν αναπτύσσονται (πραγματικές) παραμορφώσεις σε ένα ισοστατικό φορέα

  - υπερστατικοί φορείς

      ⇨ ανάπτυξη εντατικών μεγεθών και παραμορφώσεων

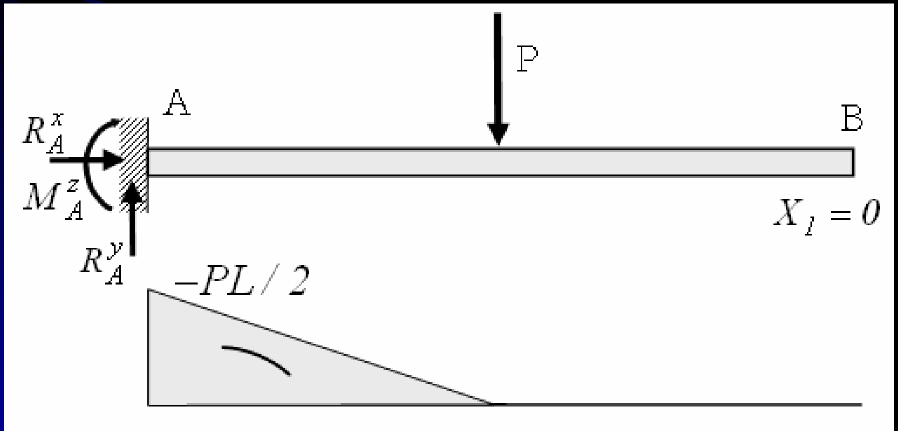
    - το μέγεθος των εντατικών μεγεθών εξαρτάται από το μέγεθος των καθιζήσεων και τη δυσκαμψία της κατασκευής

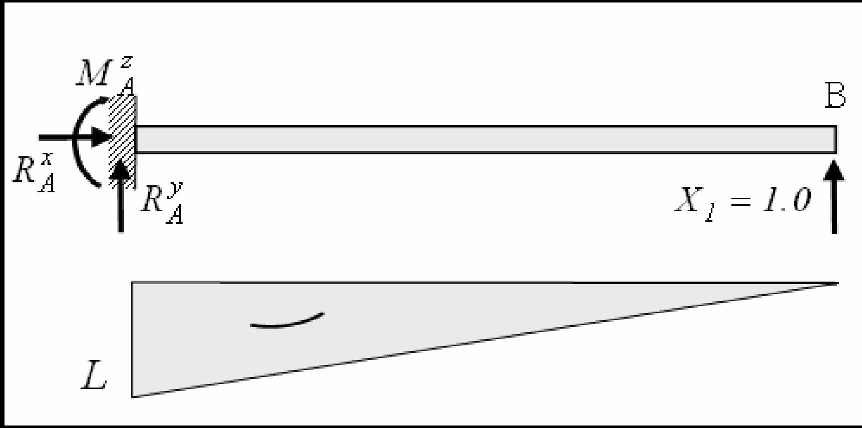
Διαφορική καθίζηση 0.01m στήριξης B (παράδειγμα-1)



- μία φορά υπερστατικός φορέας
- καθίζηση 0.01m στήριξης *B*
- ακλόνητη στήριξη *A*

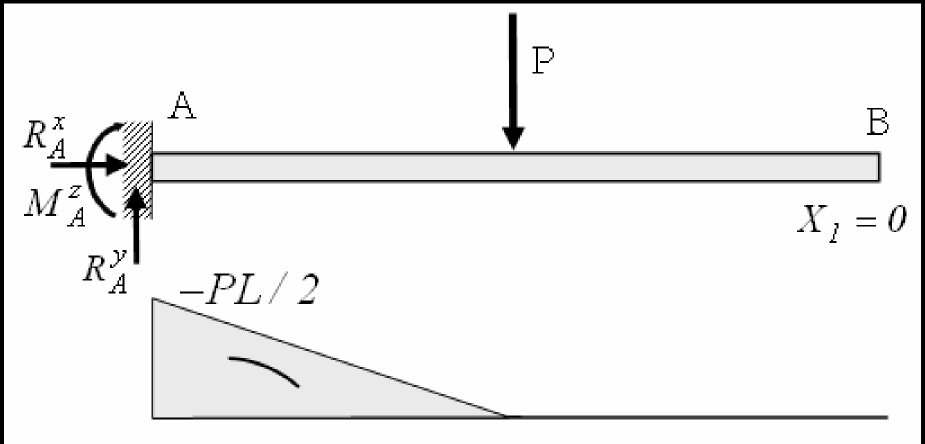
= σύστημα-0 + σύστημα-1

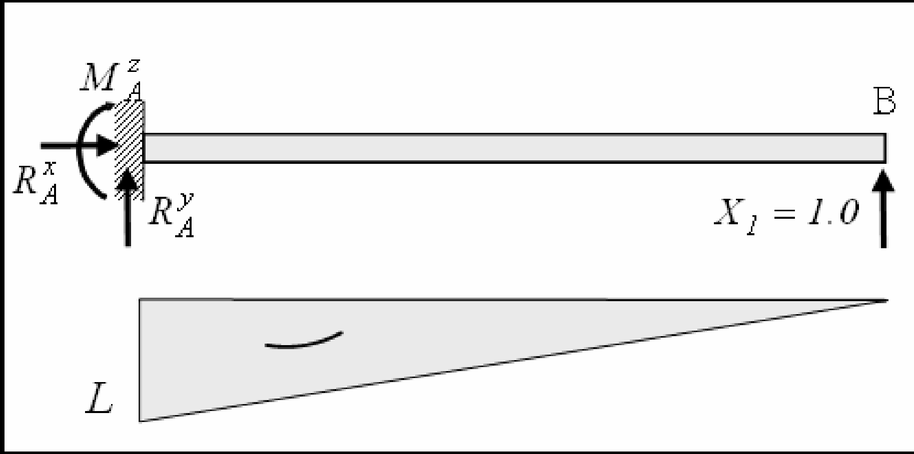




σύστημα-0

σύστημα-1





$$\delta_{10} = \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{(-P \cdot L)}{2} \cdot \left(2L + \frac{L}{2}\right) = -\frac{5 \cdot P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{3 \cdot E \cdot I} \cdot L \cdot L \cdot L = \frac{L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = -0.01$$

$$\Rightarrow \quad X_1 = \frac{-\delta_{10} - 0.01}{\delta_{11}} = \frac{\frac{5 \cdot P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} - 0.01}{\frac{L^3}{3 \cdot E \cdot I}}$$

$$P = 10KN \qquad I_z = 0.0002m^4 \qquad E = 200GPA$$

$$X_1 = \frac{-\delta_{10} - 0.01}{\delta_{11}} = \frac{\frac{5 \cdot 10{,}000 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^9 \cdot 0.0002} - 0.01}{\frac{10^3}{3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 0.0002}} = \frac{0.026 - 0.01}{8.3333 \cdot 10^{-6}}$$

$$\Rightarrow \quad X_1 = \frac{0.016}{8.3333 \cdot 10^{-6}} = 1.92 \cdot 10^3\ N = 1.92KN$$

$$X_1 = R_B^y = 1.92\ KN$$

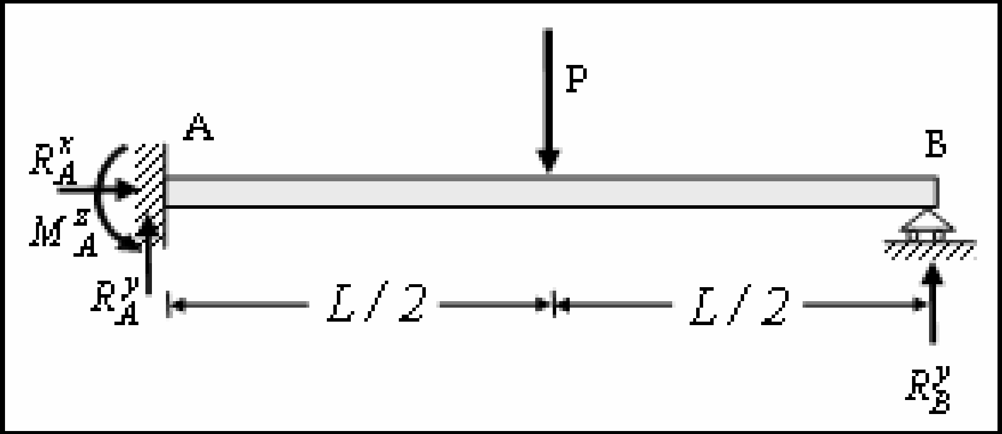
$\Rightarrow$

$$R_A^x = 0$$

$$R_A^y = 10 - 1.92 = 8.08\ KN$$

$$M_A^z = 10 \cdot 5 - 1.92 \cdot 10 = 30.8\ KNm$$

Αν αντί της αντίδρασης στη στήριξη Β, σκόπιμα ορίζαμε σαν υπερστατικό μέγεθος τη ροπή στη στήριξη Α



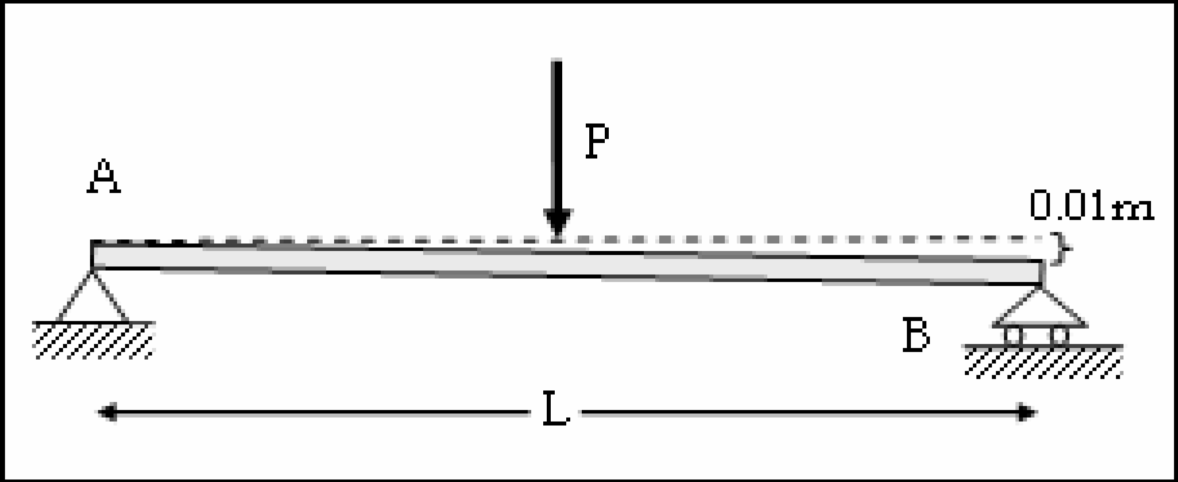
$$X_1 = M_A^z$$

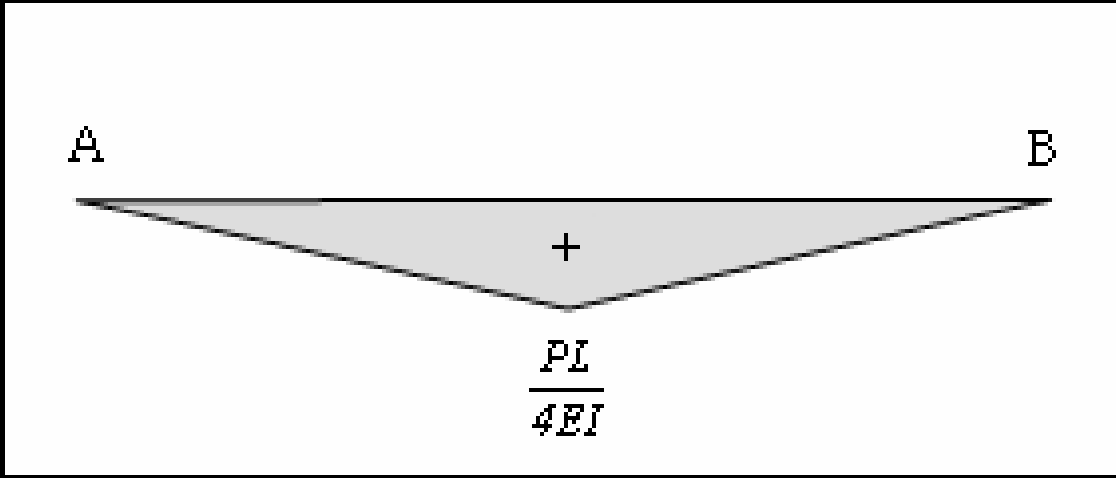
⇨ δεν συμπίπτει η καθίζηση στη στήριξη με το υπερστατικό μέγεθος

σύστημα-0:

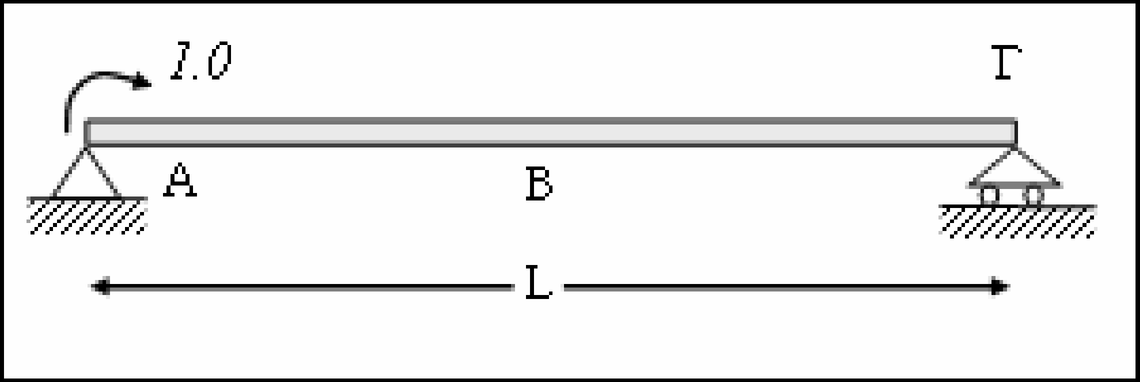
$$\delta_{10} = \delta_{10}^{M} + \delta_{10}^{\Delta}$$

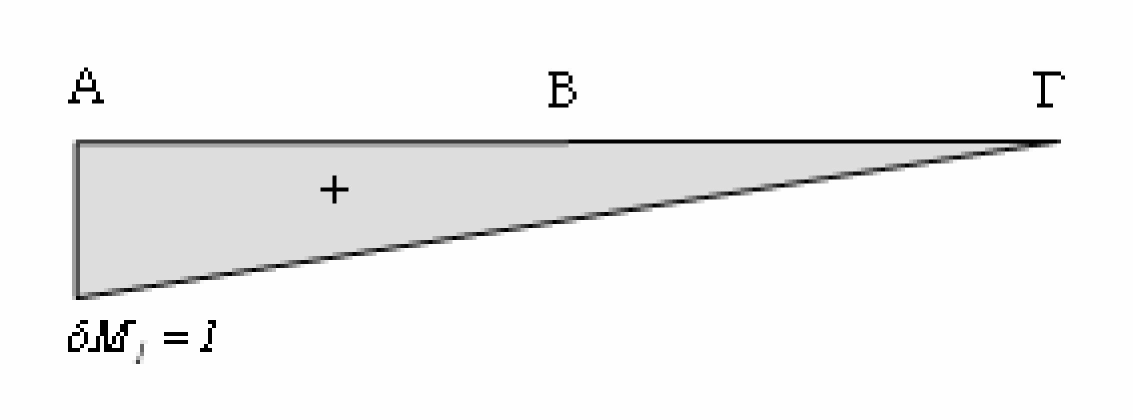
$$\delta_{10}^{\Delta} = \frac{0.01}{10} = 0.001 \ rad$$





σύστημα-1:





$$\Rightarrow \quad \delta_{10} = \frac{PL}{4EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{PL^2}{16EI} + 0.001$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{10} = \frac{10000 \cdot 10^2}{16 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 0.0002} + 0.001 = 0.0015625 + 0.001 = 0.0025625 \ radians$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{11} = \frac{L}{3EI} = \frac{10}{3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 0.0002} = 8.333 \cdot 10^{-8}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{0.0025625}{8.333 \cdot 10^{-8}} = 30750 \ NM = 30.8 \ KNm$$

$$X_1 = M_A^z = 30.8 \ KNm \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} R_A^x &= 0 \\ R_B^y &= \frac{10 \cdot 5 - 30.8}{10} = 1.92 \ KN \\ R_A^y &= 10 - 1.92 = 8.08 \ KN \end{aligned}$$

Ελαστικές στηρίξεις

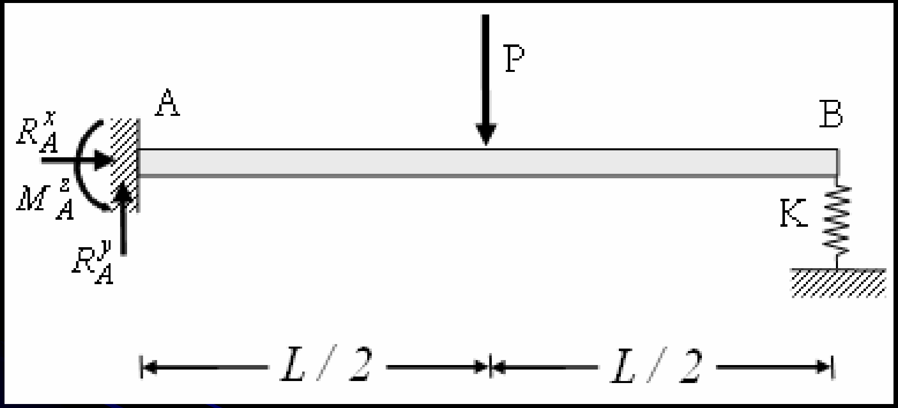
- το έδαφος δεν είναι στην πραγματικότητα πλήρως απαραμορφώσιμο

  ⇨ παραμορφώνεται λόγω των φορτίων της κατασκευής

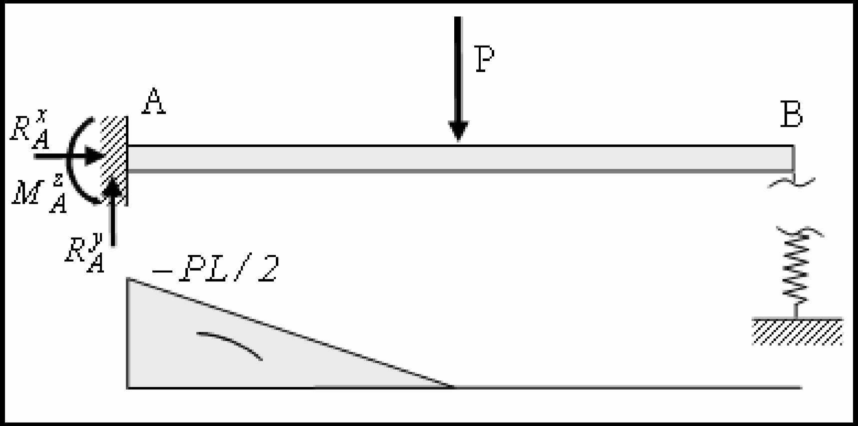
- η παραμορφωσιμότητα του εδάφους μπορεί να ληφθεί υπόψη χρησιμοποιώντας ισοδύναμα ελαστικά ελατήρια στις στηρίξεις
  - ελατηρία μεταθέσεων: K_x, K_y και K_z [N/m]
  - ελατηρίων στροφών : $K_{\varphi\chi}$, $K_{\varphi y}$ και $K_{\varphi z}$ [Nm/radian]

- οι τιμές των ελατηρίων μπορούν να εκτιμηθούν από
  - τα μηχανικά χαρακτηριστικά του εδάφους
  - τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των στοιχείων θεμελίωσης

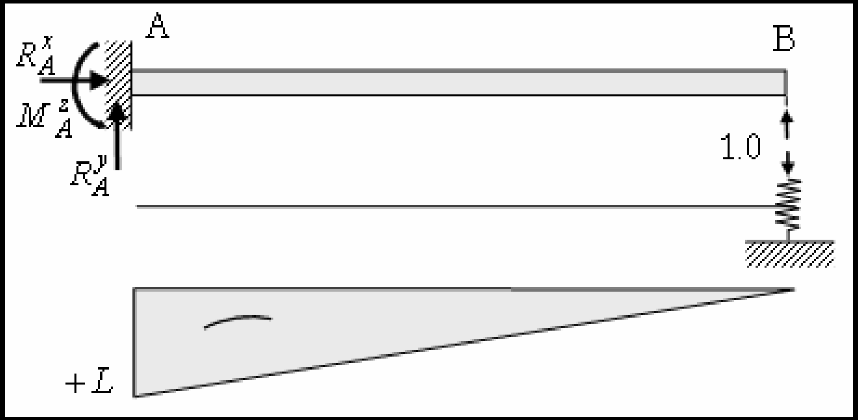
θεωρώντας ότι η στήριξη *B* της δοκού του 1ου παραδείγματος εδράζεται σε παραμορφώσιμο έδαφος:



σύστημα-0



σύστημα-1



σύστημα-0

σύστημα-1

$$\delta_{10} = \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{(-P \cdot L)}{2} \cdot \left(2L + \frac{L}{2} \right) = -\frac{5 \cdot P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

σύστημα-1

σύστημα-1

$$\delta_{11} = \frac{1}{3 \cdot E \cdot I} \cdot L \cdot L \cdot L + \frac{1}{K_y} = \frac{L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{1}{K_y}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \quad \rightarrow \quad X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\dfrac{5 \cdot P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}}{\dfrac{L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \dfrac{1}{K_y}}$$

"Success comes before work only in a dictionary."

"The person who really wants to do something finds a way; the other finds an excuse."