

ΠΠΜ 220: Στατική Ανάλυση των Κατασκευών Ι

1^η Επανάληψη Διαλέξεων

Στατική Ανάλυση Ισοστατικών Φορέων

Τρίτη, 28 Σεπτεμβρίου, 2004

Πέτρος Κωμοδρόμος

komodromos@ucy.ac.cy

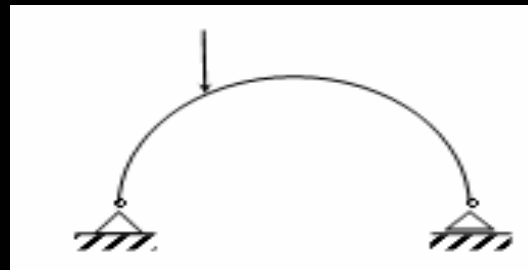
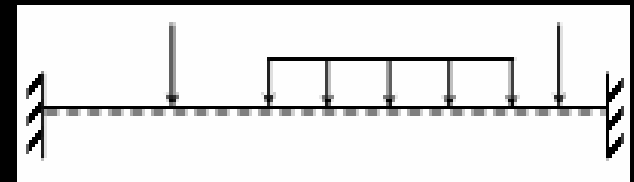
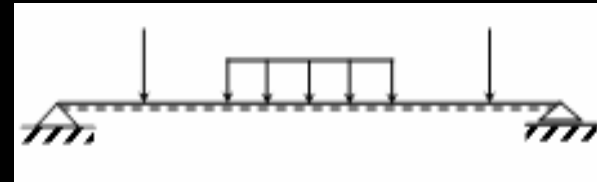
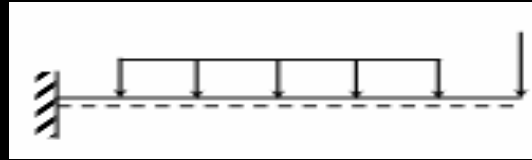
<http://www.ucy.ac.cy/~petrosk>

Θέματα

- Εισαγωγή στη Στατική Ανάλυση
 - Βασικά δομικά στοιχεία
 - Είδη κατασκευών
 - Δομικά υλικά
 - Προσομοιώσεις κατασκευών
- Φορτίσεις και βαθμοί ελευθερίας
 - Φορτία και συνδυασμοί φορτίσεων
 - Βαθμοί ελευθερίας και συνοριακές συνθήκες
 - Στηρίξεις φορέων
 - Σταθερότητα και χαλαρότητα
 - Στηρίξεις
 - Συνδέσεις και εσωτερικές ελευθερίες
- Εντατικά μεγέθη και ΑΔΕ
 - ΔΕΣ και εσωτερικά εντατικά μεγέθη
 - Εξισώσεις ισορροπίας
 - Βαθμοί στατικής αοριστίας
 - Αρχή της επαλληλίας
 - Συμμετρία και αντισυμμετρία
 - Αρχή δυνατών έργων
- Ισοστατικά Δικτυώματα
 - Εισαγωγή στα
 - Τύποι δικτυωμάτων
 - Υπερστατικότητα και σταθερότητα
 - Ανάλυση δικτυωμάτων
 - Μέθοδος των κόμβων
 - Ράβδοι μηδενικής δύναμης
 - Μέθοδος των τομών
 - Χωρικά δικτυώματα
- Ισοστατικοί Δοκοί και Πλαισία
 - Εισαγωγή στις δοκούς
 - Συνήθης τύποι δοκών
 - Εντατικά μεγέθη
 - Διαφορικές εξισώσεις δοκών
 - Διαγράμματα εντατικών μεγεθών δοκών
 - Ορθές και διατμητικές τάσεις
 - Αρχής της επαλληλίας
 - Φαινόμενα P-Δ
 - Πλαίσια και πλαισιωτές κατασκευές
 - Στατικότητα δοκών και πλαισίων
 - Παραμορφωμένες μορφές

Βασικά δομικά στοιχεία

- Ράβδοι
- Δοκοί
- Πεδιλοδοκοί
- Υποστυλώματα
- Τοιχία
- Τόξα
- Καλώδια
- Πλάκες
- Κελύφη
- Πέδιλα

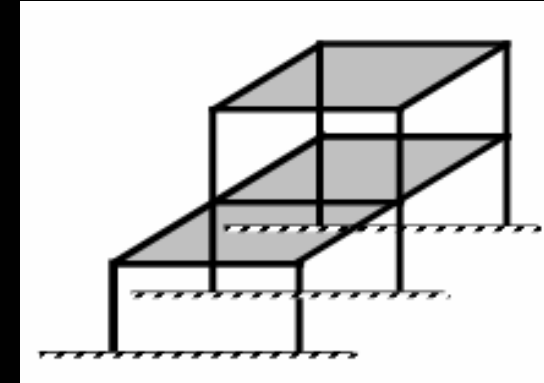
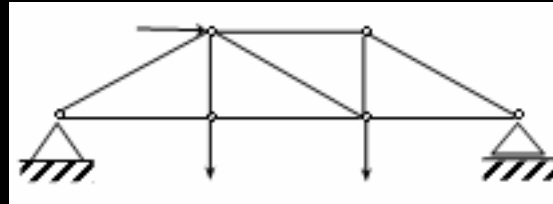


Κατηγορίες δομικών στοιχείων

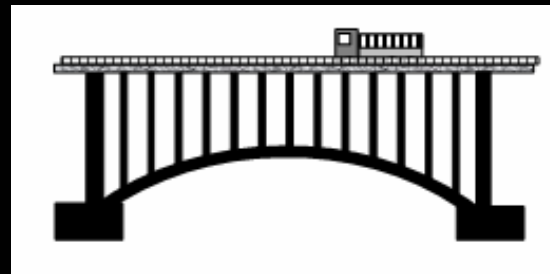
- *Γραμμικά, ή μονοδιάστατα, δομικά στοιχεία:*
 - δοκοί, υποστυλώματα, ράβδοι, πεδιλοδοκοί, τόξα, καλώδια, κλπ.
- *Επιφανειακά, ή δισδιάστατα, δομικά στοιχεία:*
 - πλάκες, κελύφη, δίσκοι, κλπ.
- *Χωρικά δομικά στοιχεία:*
 - πέδιλα, φράγματα, κλπ.

Είδη κατασκευών

- Δικτυώματα

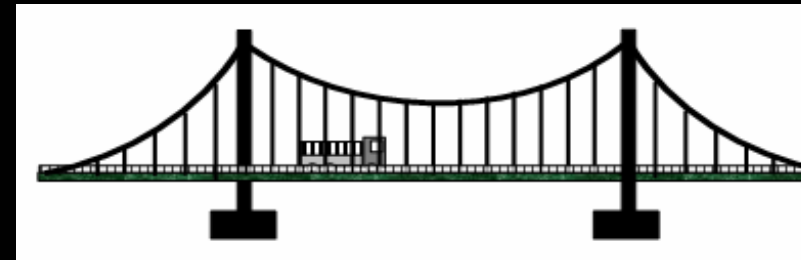


- Πλαισιωτές κατασκευές

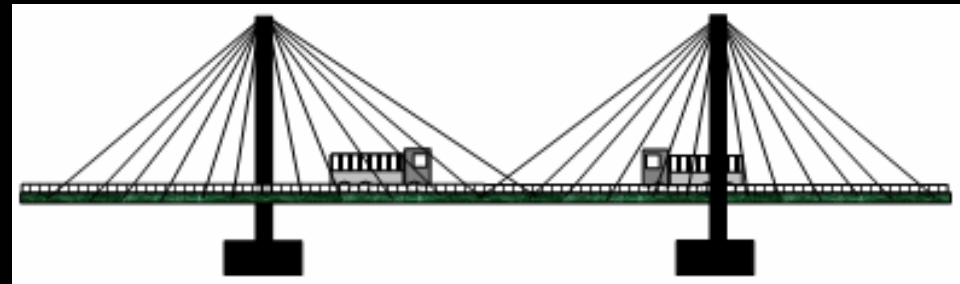


- Τοξωτές κατασκευές

- Καλωδιακές κατασκευές



- Κελυφωτές κατασκευές



Δομικά υλικά

- Σκυρόδεμα

- + ψηλή θλιπτική αντοχή
- + ντόπιο υλικό και χαμηλό κόστος παραγωγής
- + τεχνογνωσία
- + ανθεκτικότητα σε διάρκεια και ψηλές θερμοκρασίες
- + εύκολη μόρφωση σε σχεδόν οποιοδήποτε σχήμα
- χαμηλή εφελκυστική αντοχή
- ψαθυρότητα

**Οπλισμένο
σκυρόδεμα**

- Χάλυβας

- + ψηλή θλιπτική και εφελκυστική αντοχή
- + ολκιμότητα
- ψηλό κόστος

Εξιδανικεύσεις και προσομοιώσεις κατασκευών

- Ανάγκη υπολογισμού εντατικής και παραμορφωσιακής κατάστασης:
 - αντιδράσεις, εντατικά μεγέθη και τάσεις
 - παραμορφώσεις και μετακινήσεις
- Ικανοποιητική ακρίβεια αποτελεσμάτων:
 - κάνοντας απλοποιητικές παραδοχές
(π.χ. τέλει αρθρώσεις σε δικτυώματα)
- Πραγματική κατασκευή → Φυσικό προσομοίωμα → Μαθηματικό μοντέλο

Φορτία (δράσεις) και συνδυασμοί φορτίσεων

- Κατηγοριοποίηση φορτίων
 - Τρόπος επιβολής:
 - *στατικά* (αργά επιβαλλόμενα)
 - *δυναμικά* (ταλαντώσεις → αδρανειακές δυνάμεις)
 - Τρόπος εφαρμογής:
 - *συγκεντρωμένα* (π.χ. σημειακή δύναμη)
 - *επιφανειακά* (π.χ. ανεμοπίεση)
 - *μαζικά* (π.χ. βαρύτητα)
 - Πιθανοτικά:
 - *μόνιμα*: σπάνια μεταβάλλονται (π.χ. ιδιοβάρος δομικών στοιχείων)
 - *μεταβλητά*: μεταβάλλονται συχνά (π.χ. φορτία χρήσης)
 - *τυχηματικά*: μικρή πιθανότητα εμφάνισης (π.χ. έκρηξη)
- Συνδυασμοί φορτίσεων
 - συντελεστές ασφαλείας

Βαθμοί ελευθερίας

- *Επίπεδες κατασκευές:*
 - δύο μεταθέσεις και μία στροφή → 3 βαθμοί ελευθερίας ανά κόμβο
- *Χωρικές κατασκευές:*
 - τρεις μεταθέσεις και τρεις στροφές → 6 βαθμοί ελευθερίας ανά κόμβο

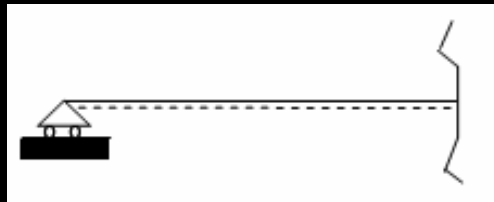
Συνοριακές συνθήκες

- Συνοριακές συνθήκες μετακινήσεων
- Συνοριακές συνθήκες δυνάμεων

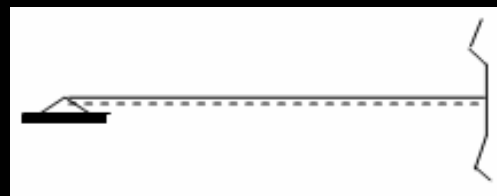
Στηρίξεις

- Επίπεδος φορέας:

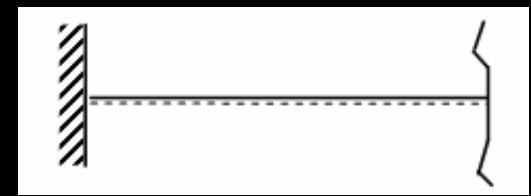
- κύλιση



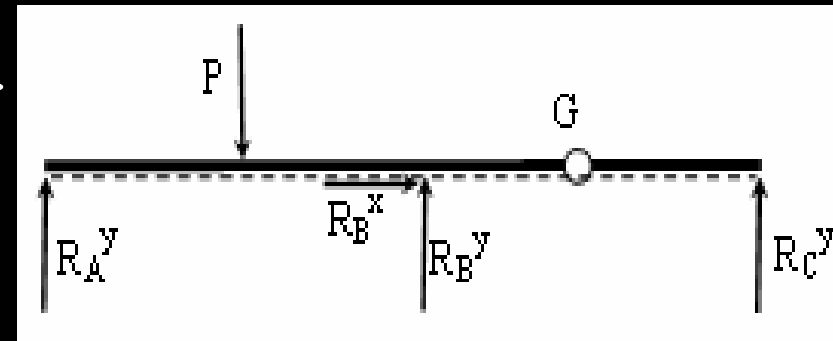
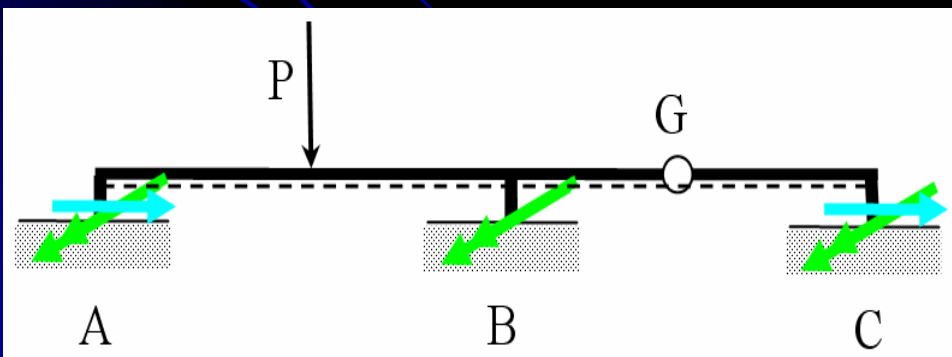
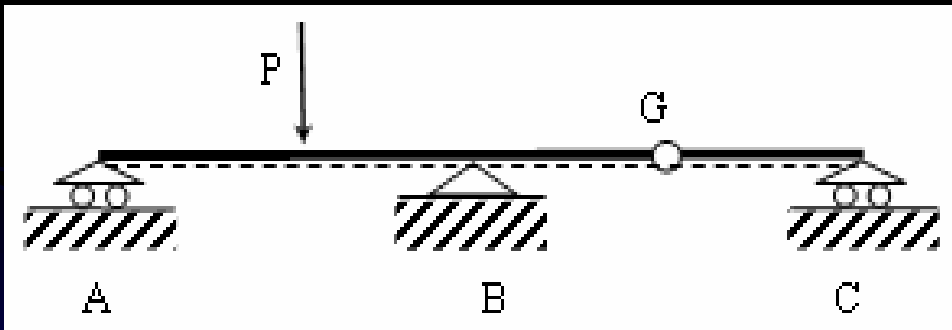
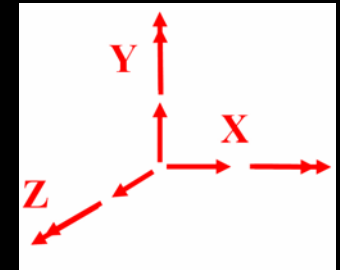
- άρθρωση



- πάκτωση

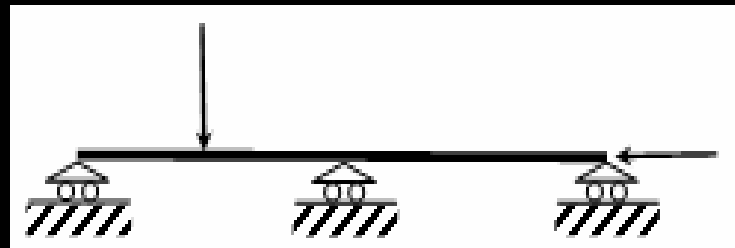
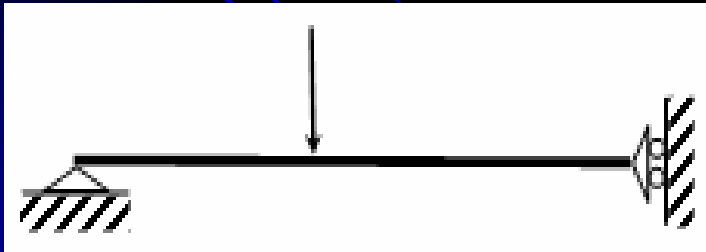


- Τρισδιάστατος φορέας: εναλλακτικοί συμβολισμοί



Σταθερότητα και χαλαρότητα φορέων

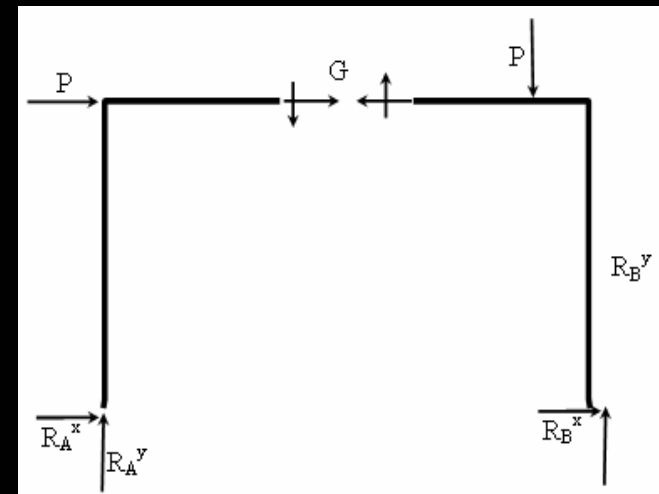
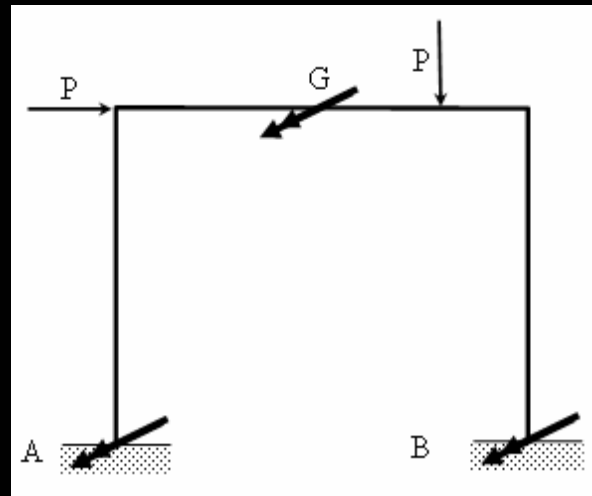
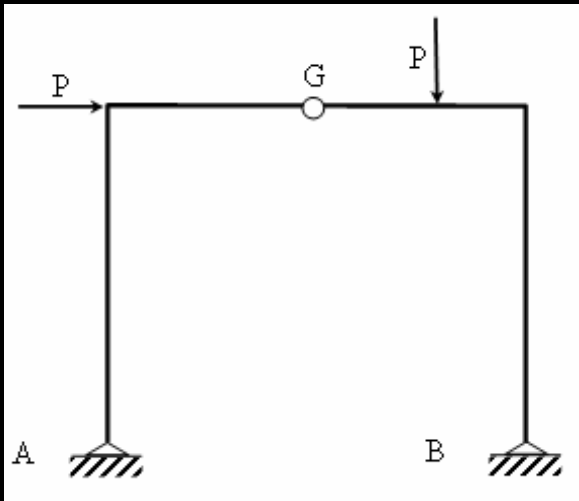
- **Σταθερός φορέας:** μπορεί να μεταφέρει οποιαδήποτε φόρτιση χωρίς να παρουσιάσει οποιαδήποτε χαλαρότητα.
- **Χαλαρότητα** παρουσιάζει ένας φορέας ο οποίος είναι κινηματικά ασταθής (ή χαλαρός), όταν κάτω από κάποια φόρτιση μπορεί να κινηθεί ελεύθερα χωρίς να μπορεί να την μεταφέρει.
 - *εξωτερική χαλαρότητα:* έλλειψη ικανοποιητικών στηρίξεων
 - *εσωτερική χαλαρότητα:* έλλειψη ικανοποιητικών συνδέσεων
- π.χ. επίπεδος απλός φορέας:
 - τρεις τουλάχιστο δεσμεύσεις βαθμών ελευθερίας
 - μη συντρέχουσες και μη παράλληλες



Συνδέσεις και εσωτερικές ελευθερίες

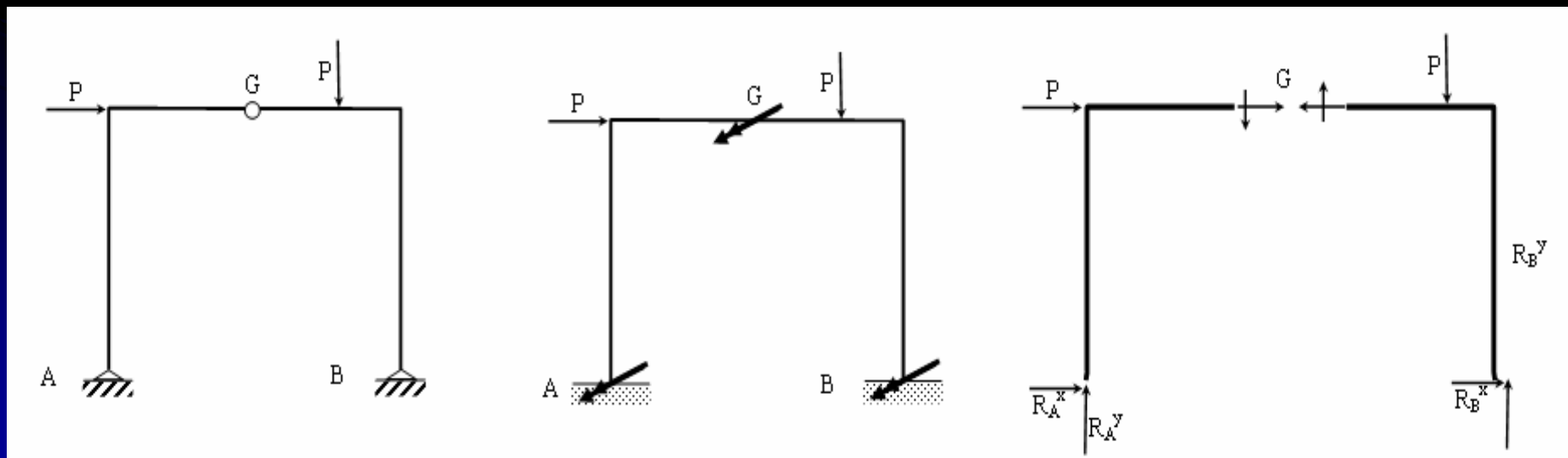
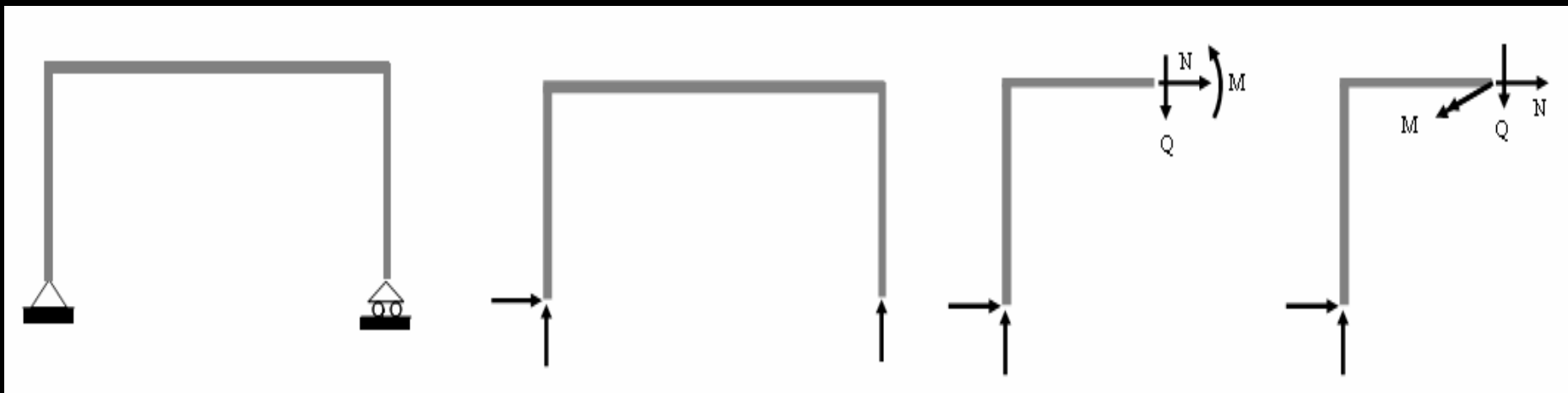
- Απλοί φορείς

- Σύνθετοι φορείς (π.χ. εσωτερικές αρθρώσεις)

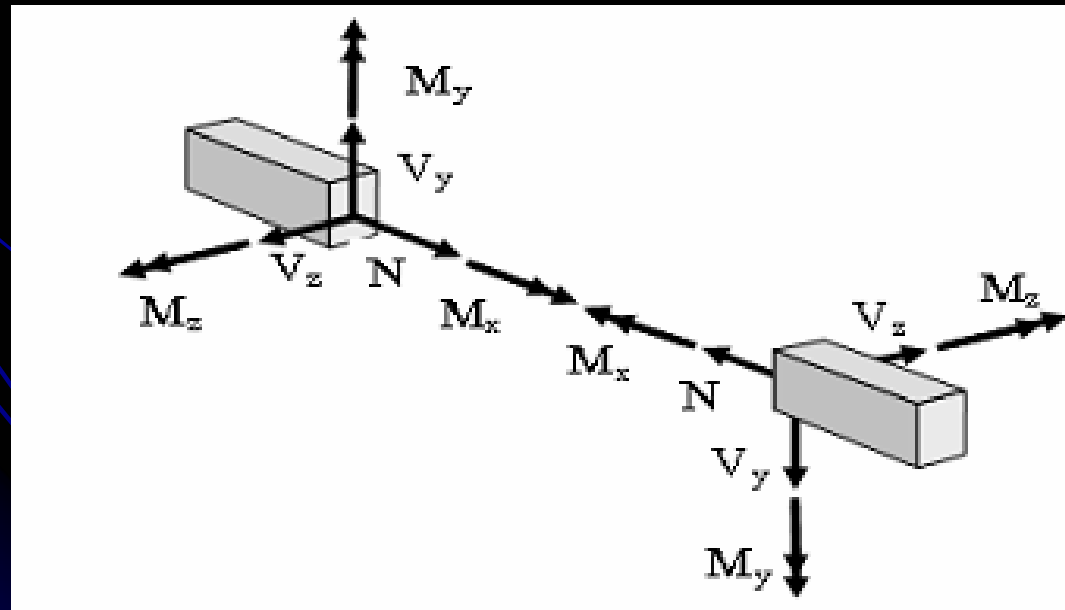
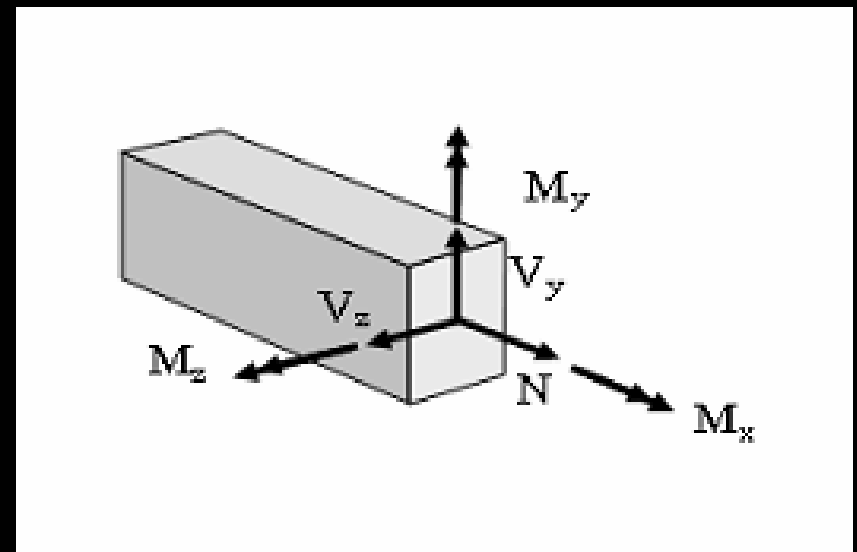
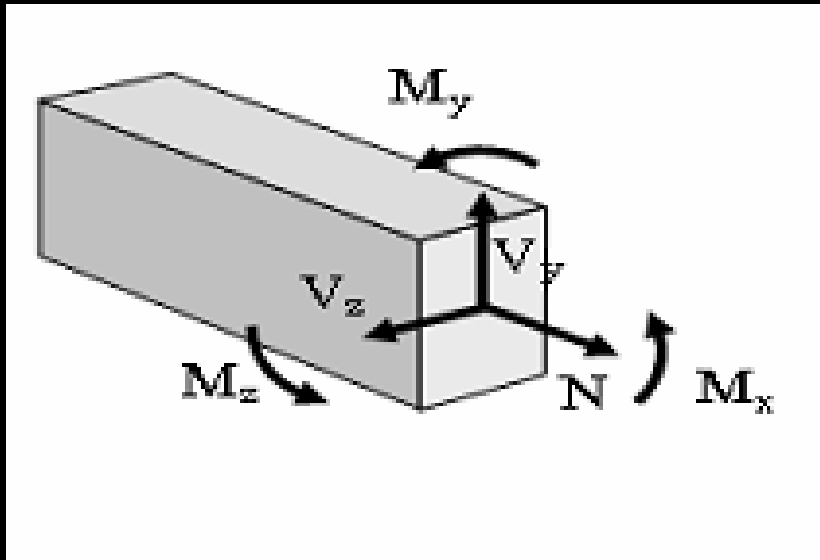


Διαγράμματα ελευθέρου σώματος και εσωτερικά εντατικά μεγέθη

- Επίπεδοι φορείς

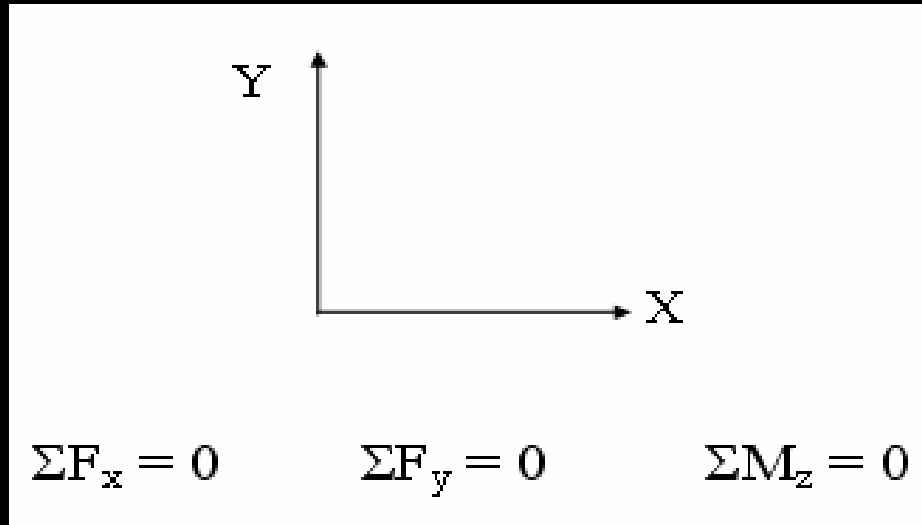


Εσωτερικά εντατικά μεγέθη χωρικών φορέων

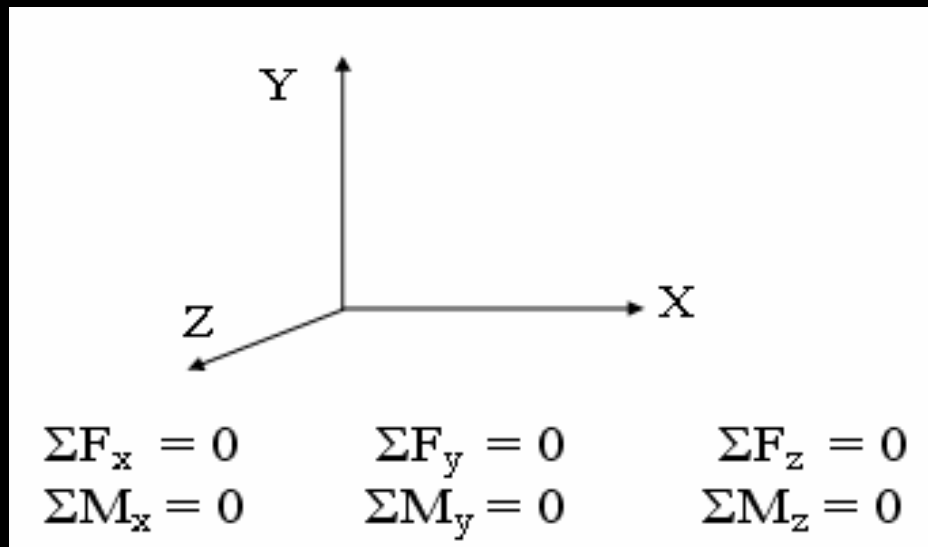


Εξισώσεις Ισορροπίας

- Επίπεδοι φορείς



- Χωρικοί φορείς



Στατικότητα απλών δοκών

$A < E + N \rightarrow$ μηχανισμός ή χαλαρός φορέας

ισοστατικός φορέας $\rightarrow A = E + N$

$A > E + N \rightarrow$ υπερστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας
(βαθμός στατικής αοριστίας: $A - E - N$)

| | | |
|---|-----------------------------|----------------------------------|
| [| N: Επίπεδοι φορείς: $N = 3$ | Χωρικοί φορείς: $N = 6$ |
| | A: αντιδράσεις | E: αριθμός εσωτερικών ελευθεριών |

Αν δεν μπορούν να υπολογιστούν με την χρήση των εξισώσεων ισορροπίας:

- οι αντιδράσεις στις στηρίξεις \rightarrow εξωτερική υπερστατικότητα
- τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη \rightarrow εσωτερική υπερστατικότητα

Υπερστατικότητα φορέων με κλειστούς βρόγχους

Τομές \rightarrow για να απλοποιηθεί ο φορέας

$\alpha < n N \rightarrow$ μηχανισμός ή χαλαρός φορέας

$\alpha = n N \rightarrow$ ισοστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας

$\alpha > n N \rightarrow$ υπερστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας
(βαθμός στατικής αοριστίας: $\alpha - n N$)

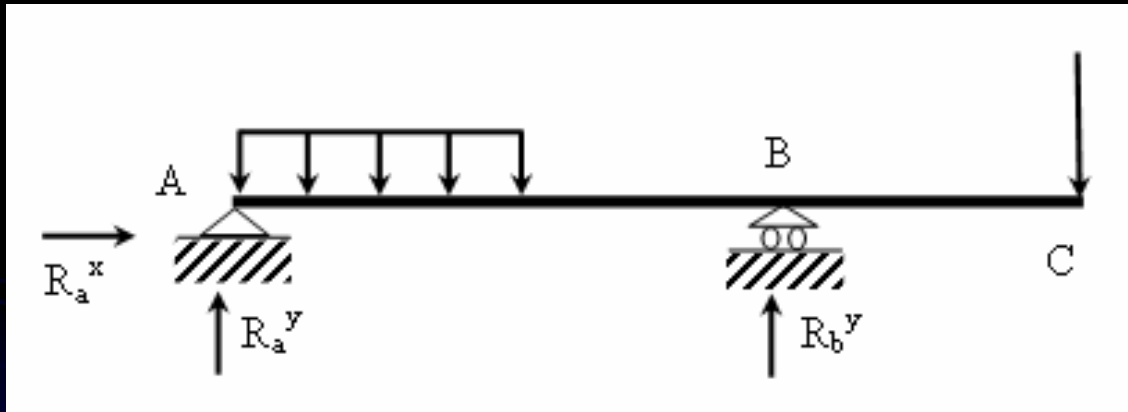
N : Επίπεδοι φορείς: $N = 3$ Χωρικοί φορείς: $N = 6$

α : αντιδράσεις συμπεριλαμβανομένων εντατικών μεγεθών σε τομές

n : αριθμός επιμέρους τμημάτων φορέα

Αρχή της Επαλληλίας

"οι αντιδράσεις και η συνολική εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση μιας κατασκευής λόγω κάποιων φορτίσεων, ή δράσεων γενικότερα, ισούται με το άθροισμα των επιμέρους αντιδράσεων, εντατικών και παραμορφωσιακών καταστάσεων, οι οποίες προκύπτουν αναλύοντας τον φορέα για κάθε μια από αυτές τις φορτίσεις ή δράσεις ξεχωριστά"

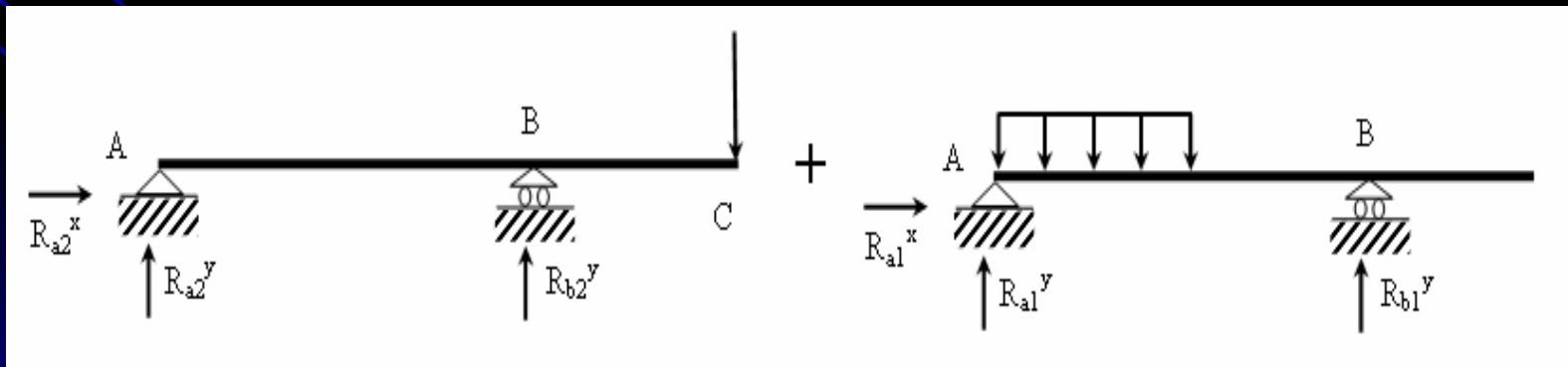


$$R_a^x = R_{a1}^x + R_{a2}^x$$

$$R_a^y = R_{a1}^y + R_{a2}^y$$

$$R_b^y = R_{b1}^y + R_{b2}^y$$

=



Συμμετρία και αντισυμμετρία

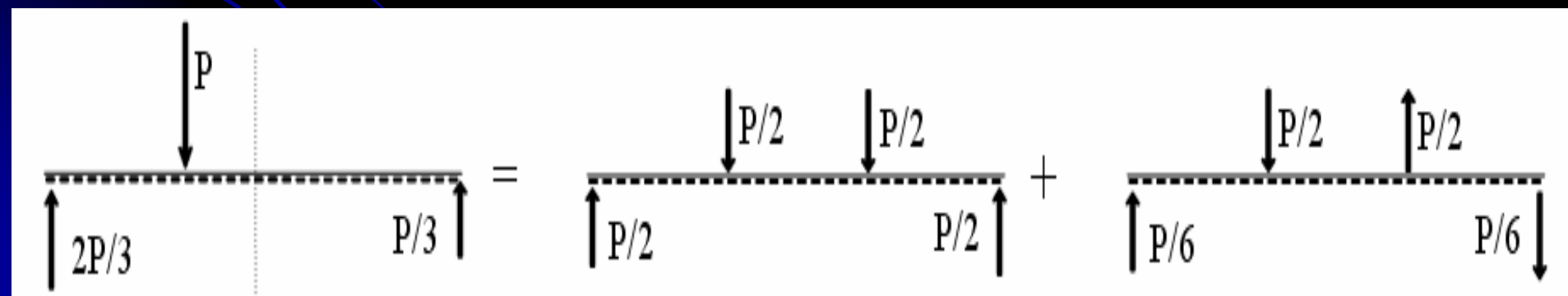
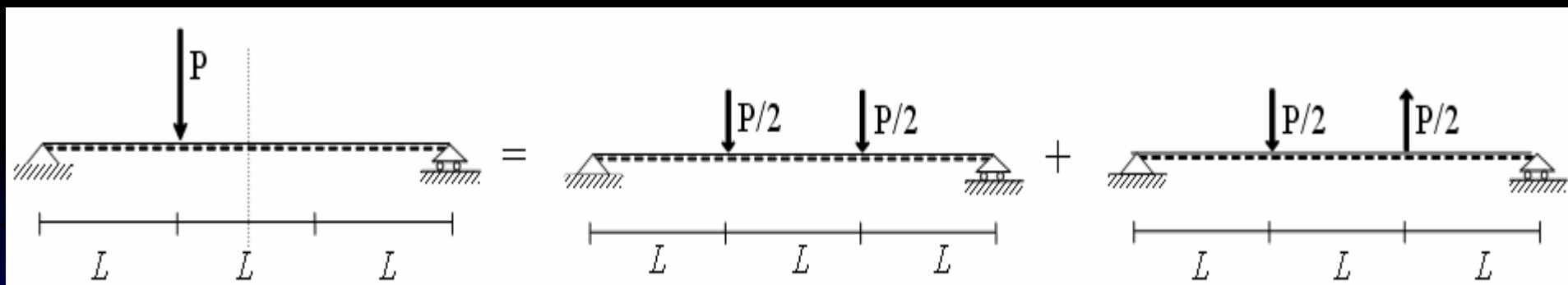
Γεωμετρία και μηχανικές ιδιότητες του φορέα συμμετρικές ως προς ένα άξονα, τον άξονα συμμετρίας (ΑΣ)

- Συμμετρικός φορέας:

⇒ τα επιβαλλόμενα φορτία να είναι συμμετρικά ως προς τον ΑΣ

- Αντισυμμετρικός φορέας:

⇒ τα επιβαλλόμενα φορτία να είναι αντισυμμετρικά ως προς τον ΑΣ



Αρχή δυνατών έργων (ΑΔΕ)

- Έργο δύναμης P κατά διαφορική μετακίνηση $d\Delta$ στην διεύθυνση της:

$$dW = P \cdot d\Delta$$

- Ολικό έργο από μετακίνηση της δύναμης P :

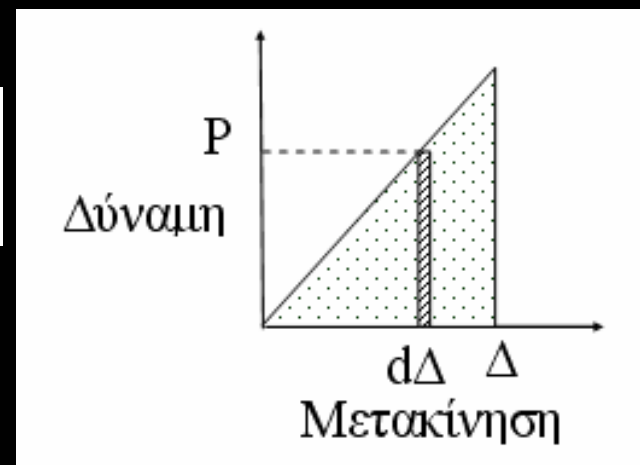
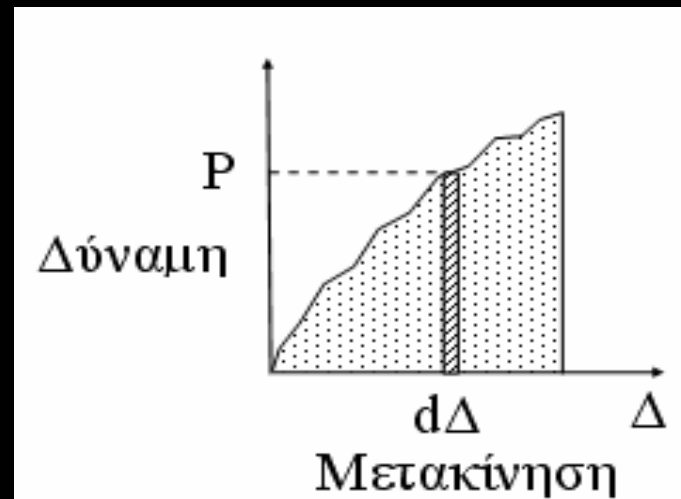
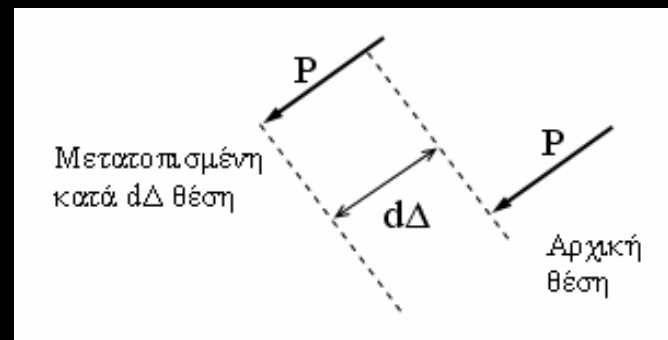
$$W = \int_0^{\Delta} P \cdot d\Delta$$

$$\Rightarrow W = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=1}^N \left(\int_0^{\Delta} P_i \cdot d\Delta_i \right)$$

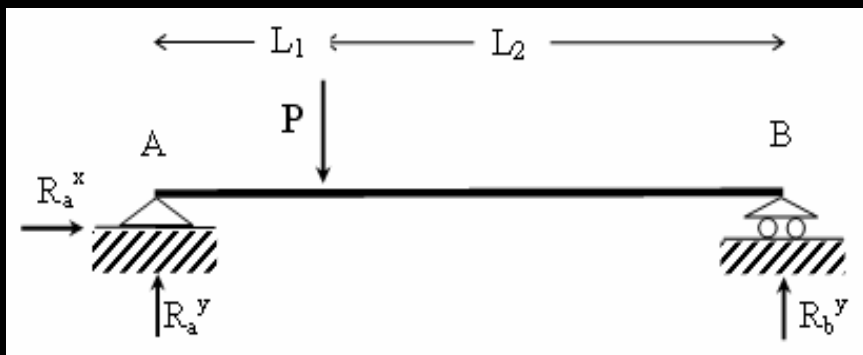
- Ολικό έργο από μετακίνηση της δύναμης P με γραμμική σχέση δύναμης-μετακίνησης:

$$\Rightarrow W = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} \cdot P_i \cdot \Delta_i \right)$$

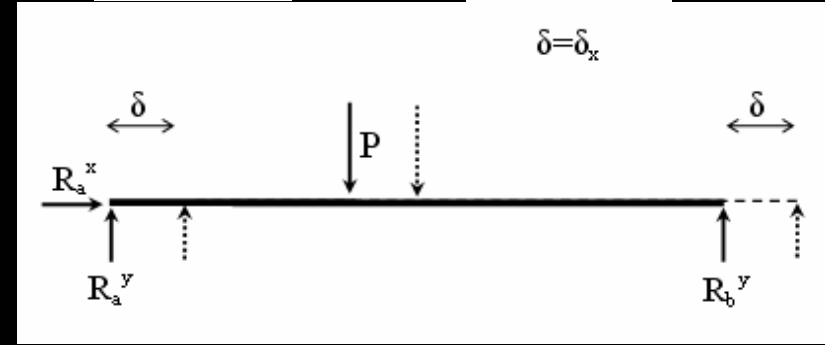
Στατική Ανάλυση των Κατασκευών I



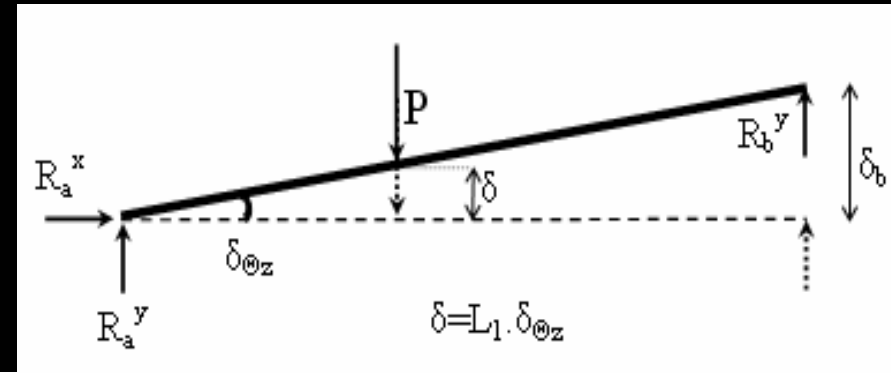
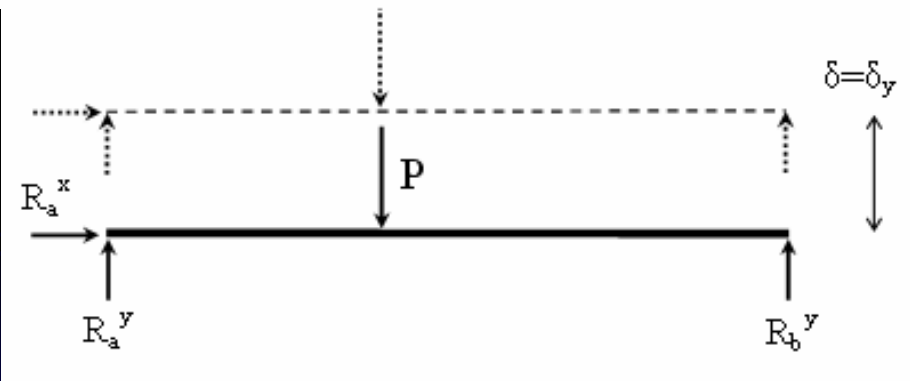
Παράδειγμα εφαρμογής ΑΔΕ:



$$\delta = \delta_x \Rightarrow R_a^x = 0$$



Μετατόπιση δ_y : $\delta W_y = \delta_y \cdot R_a^y + \delta_y \cdot R_b^y - P \cdot \delta_y = 0 \Rightarrow R_a^y + R_b^y = P$



Στροπή $\delta_{\theta z}$: $\delta W_{\theta z} = -\delta_{\theta z} \cdot L_1 \cdot P + \delta_{\theta z} \cdot (L_1 + L_2) \cdot R_b^y = 0$

$$\Rightarrow R_b^y = \frac{L_1 \cdot P}{L_1 + L_2} \Rightarrow R_a^y = \frac{L_2 \cdot P}{L_1 + L_2}$$

Εισαγωγή στα δικτυώματα

- Θεωρήσεις για δικτυώματα:
 - χωρίς τριβή αρθρωτές συνδέσεις
 - κεντρικά συνδεόμενες ράβδοι
 - κομβικά επιβαλλόμενα φορτία
 - ασήμαντο σχετικά ιδιοβάρος ράβδων



⇒ αδυναμία μεταβίβασης ροπών

⇒ μόνο αξονικές εφελκυστικές/θλιπτικές δυνάμεις

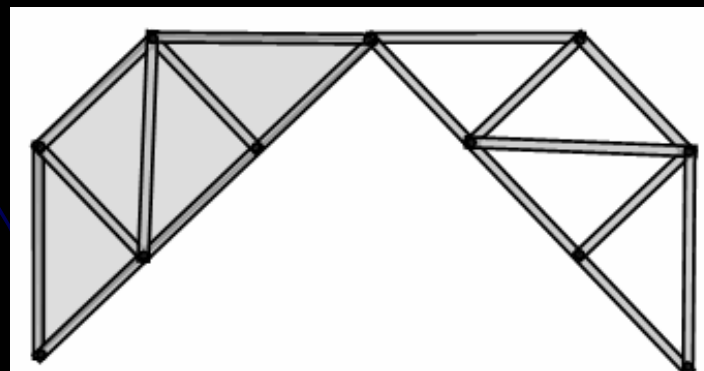
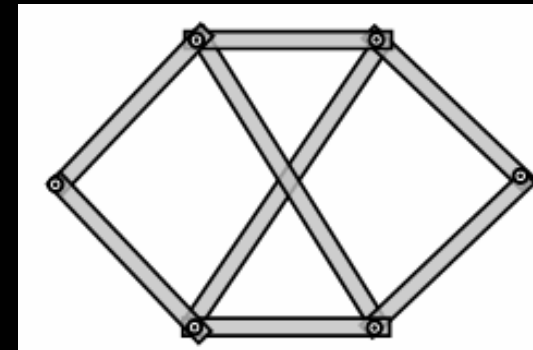
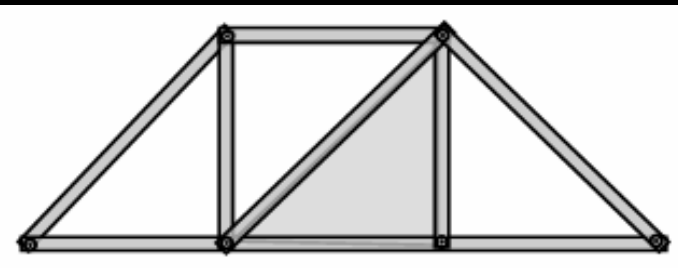
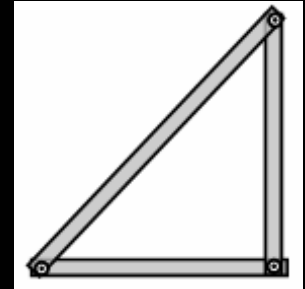
⇒ ομοιόμορφες εφελκυστικές/θλιπτικές τάσεις

⇒ βέλτιστη αξιοποίηση υλικού

⇒ δυνατότητα κάλυψης μεγάλων ανοιγμάτων

Τύποι δικτυωμάτων

- Χωρική κατηγοριοποίηση
 - *επίπεδα* δικτυώματα (δισδιάστατα)
 - *χωρικά* δικτυώματα (τρισδιάστατα)
- Κατηγοριοποίηση ανάλογα με πολυπλοκότητα
 - *απλά*: προκύπτουν από τη διαδοχική προσθήκη για κάθε δύο ράβδους ενός επιπλέον κόμβου στο βασικό δικτύωμα τρίγωνο
 - *σύνθετα*: συνδέοντας δύο ή περισσότερα απλά δικτυώματα
 - *πολύπλοκα*: ούτε απλά αλλά ούτε σύνθετα δικτυώματα



Ισοστατικότητα και βαθμοί στατικής αοριστίας δικτυωμάτων

- $P + A < 2K \rightarrow$ μηχανισμός ή χαλαρό δικτύωμα
- ισοστατικό και ενδεχομένως σταθερό δικτύωμα $\rightarrow P + A = 2K$
- $P + A > 2K \rightarrow$ υπερστατικό και ενδεχομένως σταθερό δικτύωμα (βαθμός στατικής αοριστίας: $P + A - 2K$)

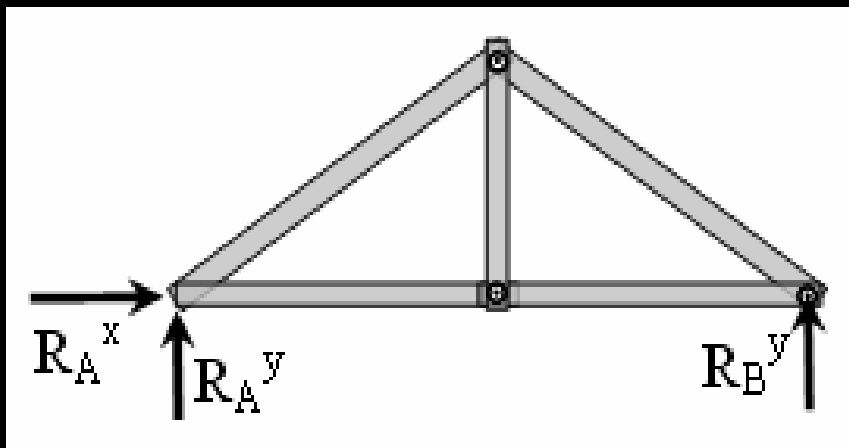
$$\left[\begin{array}{l} P: \text{ \acute{\alpha}\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha \text{ \tau}\omega\nu \ \rho\acute{\alpha}\beta\delta\omega\nu } \\ A: \text{ \acute{\alpha}\theta\rho\iota\sigma\mu\alpha \ \tau\omega\nu \ \alpha\gamma\nu\acute{\omega}\sigma\tau\omega\nu \ \alpha\nu\tau\iota\delta\rho\acute{\alpha}\sigma\epsilon\omega\nu } \\ K: \text{ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma \ \kappa\acute{o}\mu\beta\omega\nu } \end{array} \right]$$

Σταθερότητα (αδυναμία κινητικότητας) δικτυώματος

- **Εξωτερική:** πρέπει το δικτύωμα να μην μπορεί να μετακινηθεί ελεύθερα πραγματοποιώντας κίνηση στερεού σώματος. Έτσι, απαιτούνται:
 - \Rightarrow ικανοποιητικός αριθμός αντιδράσεων που να μην:
 - συντρέχουν σε ένα σημείο ούτε να είναι παράλληλες
- **Εσωτερική:** κανένας κόμβος να μην μπορεί να μετακινηθεί ελεύθερα (πραγματοποιώντας κίνηση στερεού σώματος)

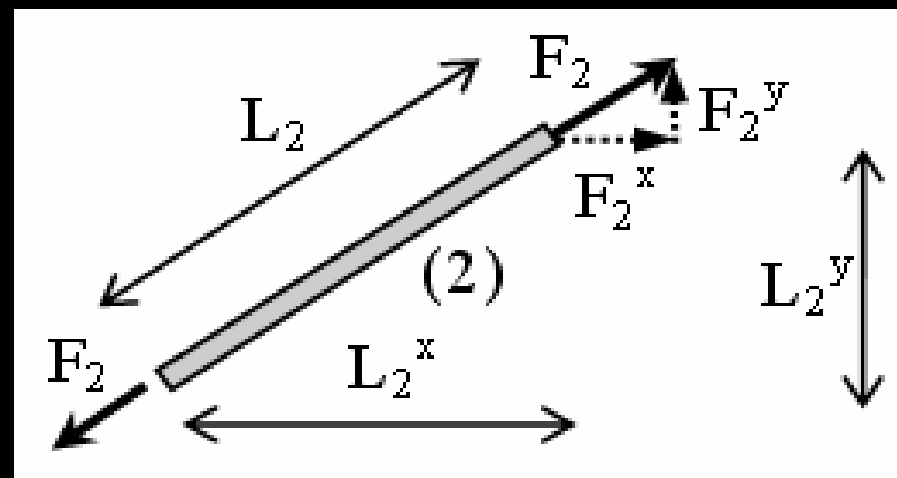
Ανάλυση δικτυωμάτων

- *μέθοδος των κόμβων:*
 - απομόνωση και διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας ενός κόμβου
 - ⇒ χρησιμοποιείται όταν απαιτείται, και εφόσον είναι δυνατή με αυτή τη μέθοδο, η εύρεση των δυνάμεων όλων των ράβδων
- *μέθοδος των τομών:*
 - ισορροπία ενός τμήματος του δικτυώματος από νοητή τομή
 - ⇒ χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των δυνάμεων ορισμένων μόνο ράβδων ή όταν δεν είναι δυνατή η εύρεση όλων των δυνάμεων με τη χρήση της μεθόδου των κόμβων (π.χ. σύνθετα δικτυώματα)
- *συνδυασμός των δύο μεθόδων*
 - ⇒ για την ευκολότερη ανάλυση κάποιων ισοστατικών δικτυωμάτων



ΔΕΣ δικτυώματος

ΔΕΣ ράβδου δικτυώματος



$$F_2^x = \frac{L_2^x}{L_2} \cdot F_2 \Leftrightarrow F_2 = \frac{L_2}{L_2^x} \cdot F_2^x$$

$$F_2^y = \frac{L_2^y}{L_2} \cdot F_2 \Leftrightarrow F_2 = \frac{L_2}{L_2^y} \cdot F_2^y$$

Μέθοδος των κόμβων

- Για να ισορροπεί ένα δικτύωμα

⇒ κάθε κόμβος του πρέπει να ισορροπεί

⇒ δύο εξισώσεις ισορροπίας για κάθε κόμβο

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right.$$

- Αυθαίρετη προσήμανση

⇒ Συνήθως, αν δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε την ορθή φορά:

- **εφελκυστικές:** οι δυνάμεις των ράβδων οι οποίες εφαρμοζόμενες πάνω στον κόμβο στον οποίο συντρέχουν φαίνονται να “τραβάνε” τον κόμβο
- **θλιπτικές:** δυνάμεις οι οποίες εφαρμοζόμενες πάνω στον κόμβο φαίνονται να “πιέζουν” τον κόμβο

Ράβδοι μηδενικής δύναμης

Αφόρτιστες ράβδοι: μηδενικές αξονικές δυνάμεις υπό κάποιες φορτίσεις

- αν σε ένα κόμβο ο οποίος δεν δέχεται οποιοδήποτε εξωτερικό φορτίο, ή αντίδραση από στηρίξεις, συντρέχουν μόνο δύο ράβδοι τότε οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων αυτών είναι απαραίτητα μηδενικές.
- αν σε ένα κόμβο ο οποίος δεν δέχεται οποιοδήποτε εξωτερικό φορτίο, ή αντίδραση από στηρίξεις, συντρέχουν τρεις ράβδοι δύο εκ των οποίων είναι συγγραμμικές τότε η αξονική δύναμη της τρίτης ράβδου, η οποία δεν είναι συγγραμμική, είναι απαραίτητα μηδενική.

⇒ Σημαντική απλοποίηση της ανάλυσης ενός δικτυώματος με τον προσδιορισμό τυχόν αφόρτιστων ράβδων

Μέθοδος των τομών (Ritter)

- Για τον υπολογισμό των δυνάμεων συγκεκριμένων ράβδων

- Για να ισορροπεί ένα δικτύωμα

$$\sum F_x = 0$$

⇒ κάθε τμήμα του πρέπει να ισορροπεί

$$\sum F_y = 0$$

⇒ τρεις εξισώσεις ισορροπίας για κάθε τμήμα

$$\sum M_z = 0$$

- Προτιμότερο να μην τέμνουμε περισσότερες από 3 ράβδους άγνωστων δυνάμεων

⇒ αποφυγή σχηματισμού και επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων

- Αν τέμνονται τρεις ράβδοι με άγνωστες δυνάμεις, οι δύο να είναι παράλληλες

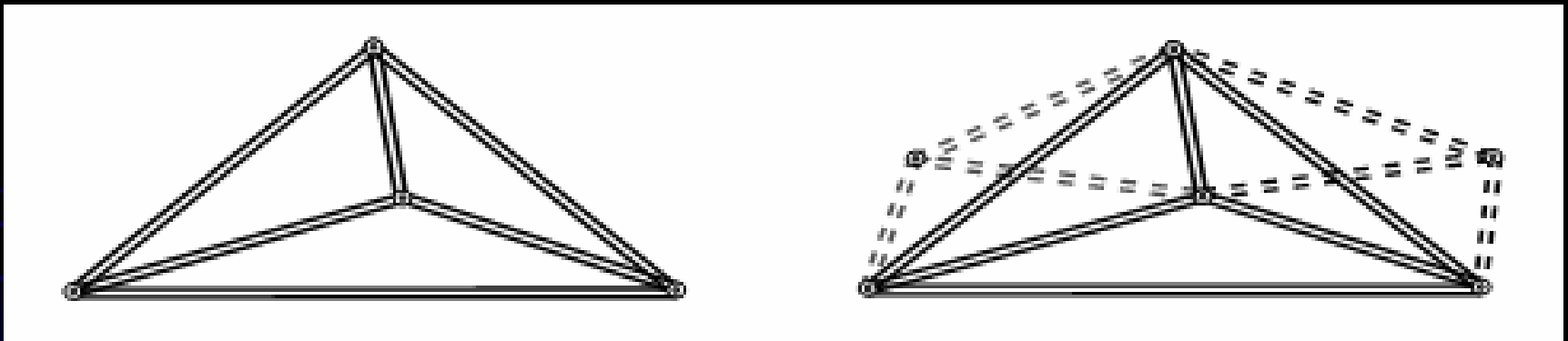
⇒ υπολογισμός τρίτης ράβδου από την εξίσωση ισορροπίας στην άλλη διεύθυνση

- Αν τέμνονται τρεις ράβδοι με άγνωστες δυνάμεις

⇒ υπολογισμός της μιας ράβδου να υπολογιστεί από την εξίσωση ροπής ως προς το σημείο στο οποίο συντρέχουν οι άλλες δύο ράβδοι.

Χωρικά δικτυώματα

- τρισδιάστατοι φορείς
- το απλούστερο σταθερό δικτύωμα που μπορεί να υπάρχει είναι το τετράεδρο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βασική μονάδα για το σχηματισμό χωρικών δικτυωμάτων, προσθέτοντας διαδοχικά για κάθε επιπλέον κόμβο τρεις ράβδους



- Ισοροπία κόμβων:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

Ισοστατικότητα χωρικών δικτυωμάτων

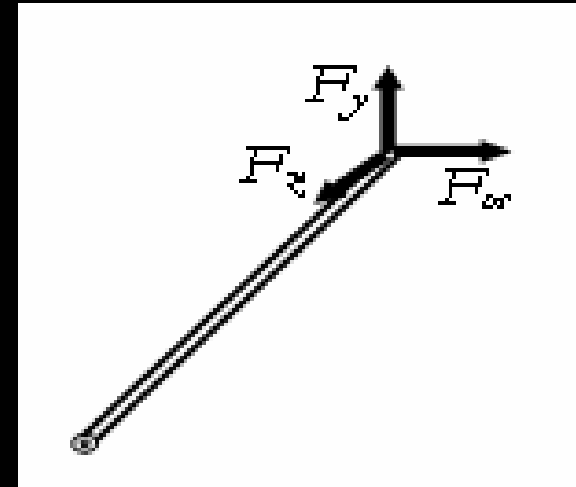
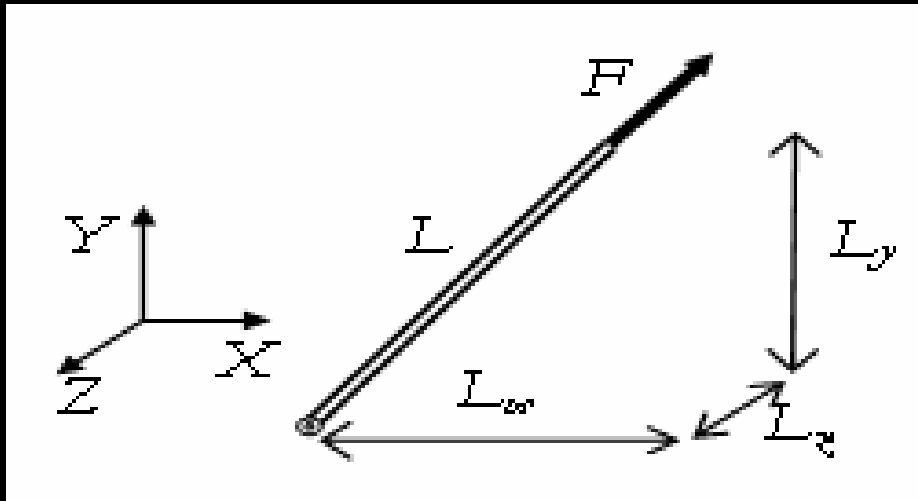
$P + A < 3 K \rightarrow$ μηχανισμός ή χαλαρό δικτύωμα

$P + A = 3 K \rightarrow$ ισοστατικό και ενδεχομένως σταθερό δικτύωμα

$P + A > 3 K \rightarrow$ υπερστατικό και ενδεχομένως σταθερό δικτύωμα
(βαθμός στατικής αοριστίας: $P + A - 3 K$)

$\left[\begin{array}{l} P: \text{ άθροισμα των ράβδων} \\ A: \text{ άθροισμα των αγνώστων αντιδράσεων} \\ K: \text{ αριθμός κόμβων} \end{array} \right]$

Χρήσιμες σχέσεις για χωρικά δικτυώματα



$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$F_x = F \times \frac{L_x}{L}$$

$$F_y = F \times \frac{L_y}{L}$$

$$F_z = F \times \frac{L_z}{L}$$

Μέθοδοι επίλυσης ισοστατικών χωρικών δικτυωμάτων

- Μέθοδος κόμβων

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

- Μέθοδος τομών

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

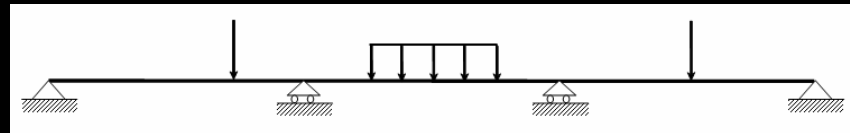
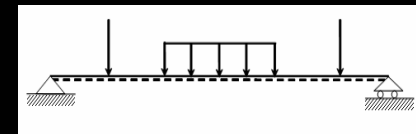
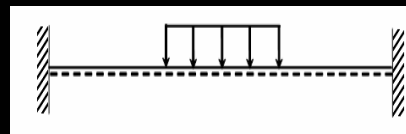
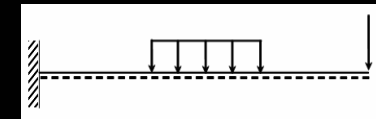
$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

Εισαγωγή στις δοκούς

- το πιο κοινό δομικό στοιχείο
- σχετικά μικρές διαστάσεις στις δύο εγκάρσιες διευθύνσεις σε σχέση με την τρίτη και συνήθως οριζόντια διαμήκη διεύθυνση, τον άξονα τους
- καταπονούνται συνήθως με φορτία κάθετα στον διαμήκη άξονα τους
 - συμπεριφορά και διαστασιολόγηση εξαρτάται:
 - συνήθης δοκοί: από *καμπτικές ροπές και παραμορφώσεις*
 - κοντές και υψίκορμες δοκοί: από *τέμνουσες δυνάμεις*
- Διαφορετικά είδη φορτίων:
 - συγκεντρωμένα
 - δυνάμεις
 - ροπές
 - κατανεμημένα
 - ομοιόμορφα
 - τριγωνικά
 - παραβολικά, κλπ.

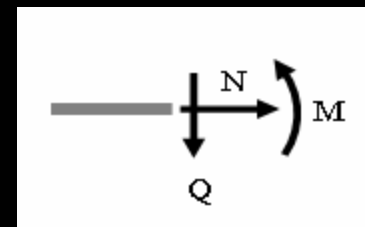


Εντατικά μεγέθη δοκών (στο επίπεδο)

- καμπτικές ροπές, $M(x)$:

- γραμμικά μεταβαλλόμενες καθ' ύψος της διατομής ορθές τάσεις (θλιπτικές στο ένα πέλμα και εφελκυστικές στο άλλο)

- καθοριστικές στη διαστασιολόγηση συνήθων δοκών



- τέμνουσες δυνάμεις, $V(x)$:

- παραβολικά μεταβαλλόμενες καθ' ύψος της διατομής διατμητικές τάσεις

- καθοριστικές μόνο σε περιπτώσεις κοντών και υψίκορμων δοκών

- αξονικές δυνάμεις, $N(x)$:

- μεταφέρονται από ομοιόμορφες ορθές τάσεις

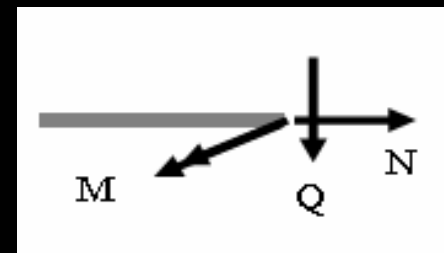
- καθοριστικές σε περιπτώσεις μεγάλων αξονικών φορτίων

- υποστυλώματα

- κίνδυνος λυγισμού και φαινομένων P-Δ όταν έχουμε:

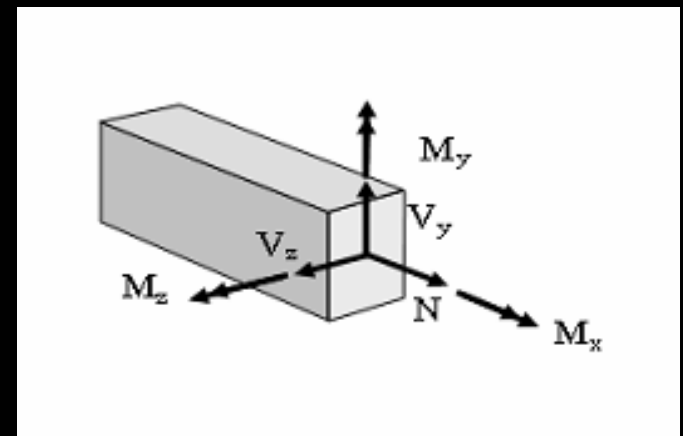
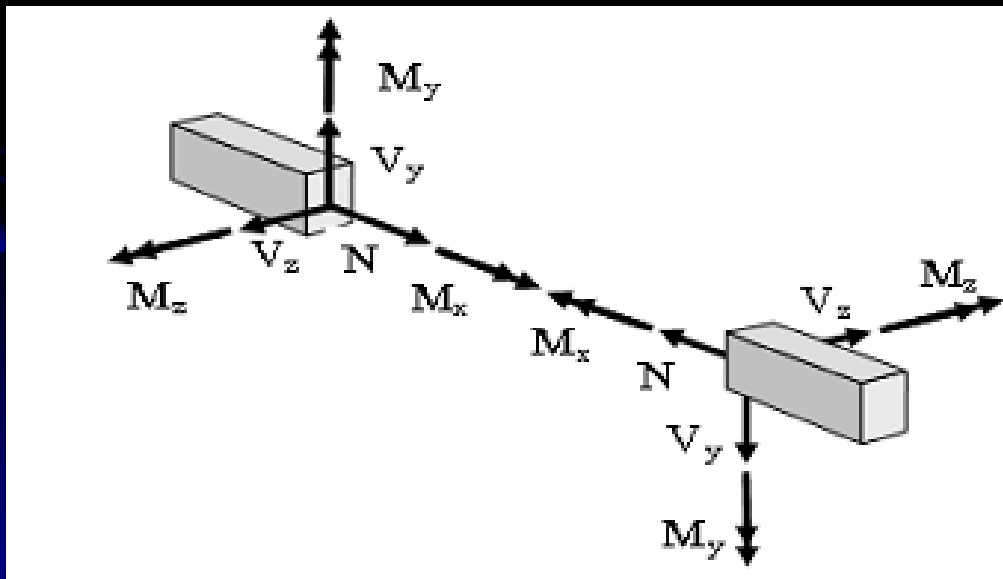
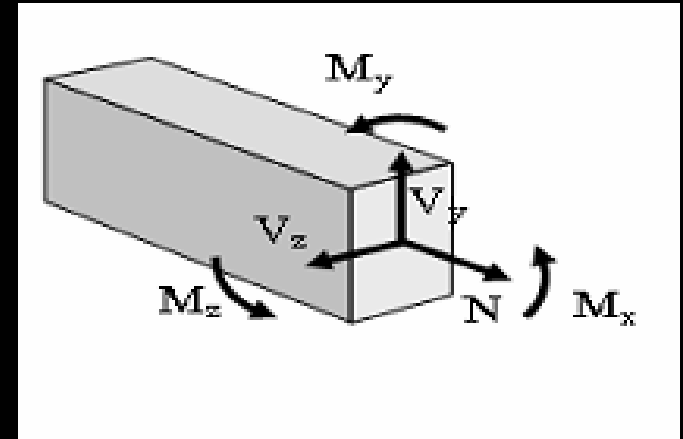
- σημαντικά αξονικά φορτία

- εύκαμπτα μέλη



Εντατικά μεγέθη δοκών (στο χώρο)

- αξονικές δυνάμεις, $N(x)$
- τέμνουσες δυνάμεις, $V_y(x)$ και $V_z(x)$
- καμπτικές ροπές, $M_y(x)$ και $M_z(x)$
- ροπές στρέψης, $M_x(x)$

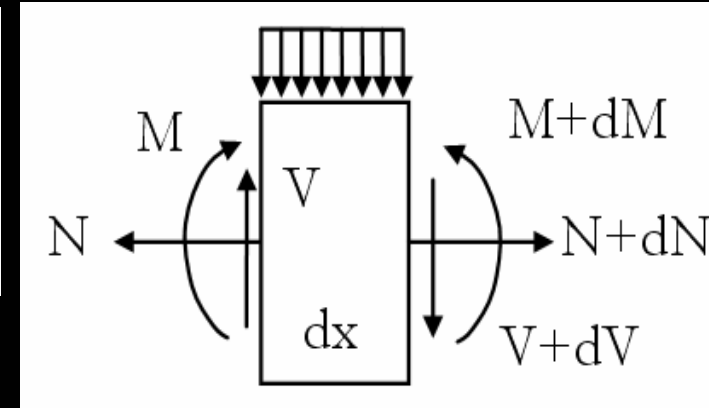
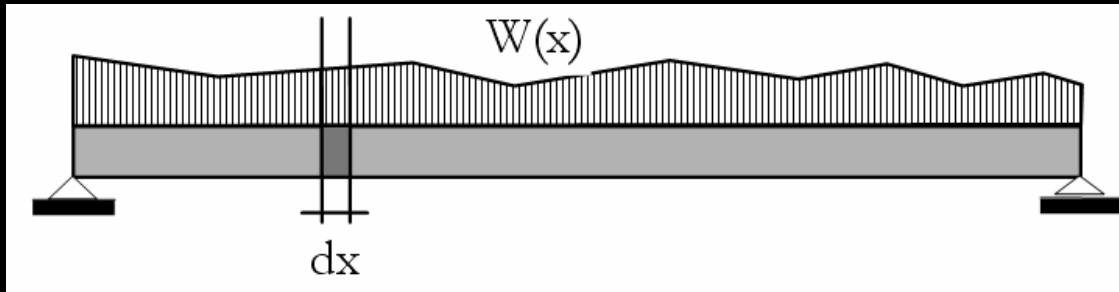


Επίλυση δοκών

- Προσδιορισμός των *αντιδράσεων*
- Υπολογισμός των *εντατικών μεγεθών*
- Κατασκευή *διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών*
- Προσδιορισμός των *ακρότατων* τιμών των εντατικών μεγεθών
- Κατασκευή *περιβαλλουσών* διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών

(καμπύλες ή ευθείες που απεικονίζουν τις μέγιστες τιμές των εντατικών μεγεθών κατά μήκος του δομικού μέλους λαμβάνοντας υπόψη διάφορες περιπτώσεις και συνδυασμούς φορτίσεων)

Διαφορικές εξισώσεις δοκών



- ΔΕΣ απειροστού στοιχείου dx :
- Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{dV(x)}{dx} = -w_y(x)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{dN(x)}{dx} = -w_x(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -w(x)$$

Διαφορικές εξισώσεις και διαγράμματα εντατικών μεγεθών

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -w_y(x)$$

- η καμπτική ροπή έχει ακρότατα όπου η τέμνουσα δύναμη μηδενίζεται
- όπου υπάρχει συγκεντρωμένη δύναμη
 - ⇒ αντίστοιχο άλμα στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων ($\Delta T\Delta$)
 - ⇒ αλλαγή κλίσης στο διάγραμμα καμπτικών ροπών
- όπου υπάρχει συγκεντρωμένη ροπή
 - ⇒ αντίστοιχο άλμα στο διάγραμμα καμπτικών ροπών ($\Delta K\rho$)
- αν το φορτίο είναι πολυώνυμο βαθμού n
 - ⇒ η τέμνουσα δύναμη θα είναι πολυώνυμο βαθμού $n+1$
 - ⇒ η καμπτική ροπή θα είναι πολυώνυμο βαθμού $n+2$

Διαγράμματα εντατικών μεγεθών (ΔΤΔ)

- αριθμός τομών κάθετα στον άξονα της δοκού
- εφαρμογή εξισώσεων ισορροπίας στο ΔΕΣ του αποκομμένου τμήματος
 - ⇒ διατύπωση εκφράσεων για τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη
- αλλαγή του μεγέθους της τέμνουσας μεταξύ δύο σημείων A και B:

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = \int_{X_A}^{XB} dV = - \int_{X_A}^{XB} w(x) dx$$

- το ολοκλήρωμα ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας της καμπύλης του φορτίου μεταξύ των σημείων A και B
- η κλίση του ΔΤΔ ισούται με το αρνητικό μέγεθος του φορτίου
 - ⇒ αν το φορτίο είναι προς τα κάτω τότε η κλίση είναι αρνητική
- συγκεντρωμένη δύναμη
 - ⇒ άλμα στην τιμή της τέμνουσας δύναμης (ΔΤΔ)

Διαγράμματα εντατικών μεγεθών (ΔΚΡ)

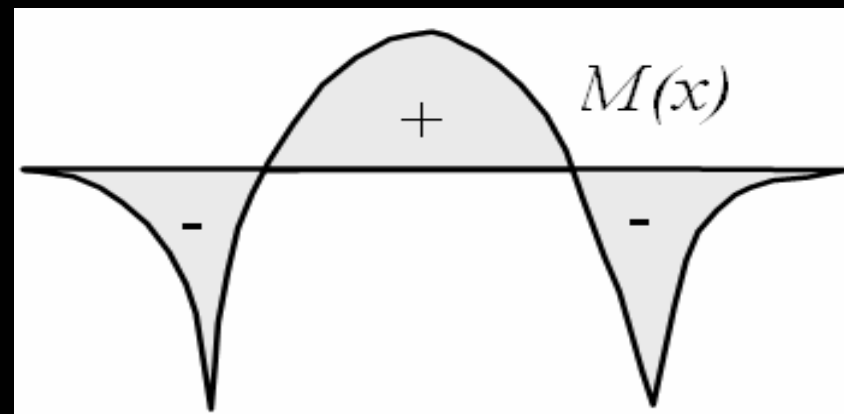
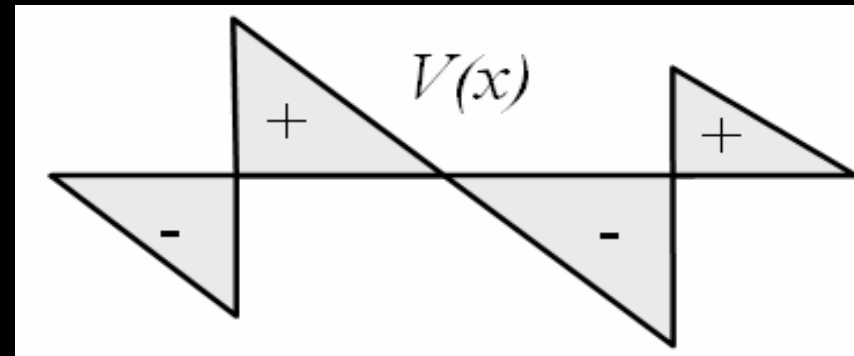
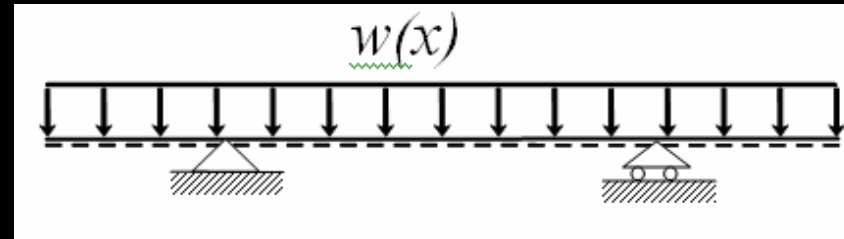
- αλλαγή του μεγέθους της ροπής μεταξύ δύο σημείων A και B

$$\Delta M_{AB} = M_B - M_A = \int_{X_A}^{XB} dM = \int_{X_A}^{XB} V(x) dx = - \int_{X_A}^{XB} w(x) dx$$

- το ολοκλήρωμα ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας της καμπύλης των τεμνουσών δυνάμεων (ΔΤΔ) μεταξύ των σημείων A και B
- η κλίση της καμπύλης των καμπτικών ροπών σε ένα σημείο ισούται με το μέγεθος της τέμνουσας στο συγκεκριμένο σημείο
- αν σε ένα σημείο η τέμνουσα δύναμη είναι θετική τότε και η κλίση της καμπύλης της καμπτικής ροπής σε εκείνο το σημείο είναι θετική
- τα ακρότατα των καμπτικών ροπών εμφανίζονται στα σημεία όπου οι αντίστοιχες τέμνουσες δυνάμεις ισούνται με μηδέν
- συγκεντρωμένη ροπή
⇒ άλμα στην τιμή της καμπτικής ροπής (ΔΚΡ)

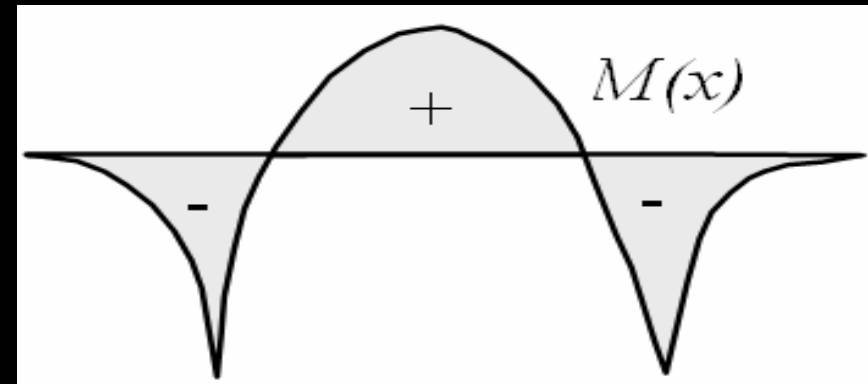
Κατασκευή διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών

- υπολογισμός των αντιδράσεων
- ξεκινώντας με τις τιμές της τέμνουσας δύναμης και της καμπτικής ροπής στο αριστερό άκρο προχωρούμε προς τα δεξιά
- εξετάζουμε όλα τα σημεία με σχετικές αλλαγές (π.χ. όπου υπάρχουν συγκεντρωμένες δυνάμεις ή ροπές, ή όπου αρχίζουν και τελειώνουν κατανεμημένα φορτία, κλπ.) προσθέτοντας τα αντίστοιχα εμβαδά κάτω από τις καμπύλες των φορτίων και τεμνουσών δυνάμεων, αντίστοιχα, σαν αλλαγές των τιμών των αντίστοιχων διαγραμμάτων



Καμπυλότητα της παραμορφωμένης δοκού

- κατασκευή διαγράμματος καμπτικών ροπών (ΔΚΡ)
- θετική καμπτική ροπή
⇒ η καμπυλότητα στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (εφελκύει την κάτω ίνα της δοκού)
- αρνητική καμπτική ροπή
⇒ η καμπυλότητα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (εφελκύει την άνω ίνα της δοκού)
- μηδενική καμπτική ροπή
⇒ σημείο καμπής στην καμπυλότητα, δηλαδή αλλάζει η πλευρά στην οποία βλέπουν τα κοίλα από πάνω κάτω ή αντίστροφα.



Ορθές και διατμητικές τάσεις

- ορθές τάσεις

$$\sigma_{max} = \frac{M_z \cdot y_c}{I_z}$$



$$\sigma_x = \frac{M_z}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \frac{M_z}{W_z}$$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$y_c = \frac{h}{2}$$

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}$$



- διατμητικές τάσεις

$$\tau_{max} = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z \cdot t}$$

- ορθογωνική διατομή $b \times h$

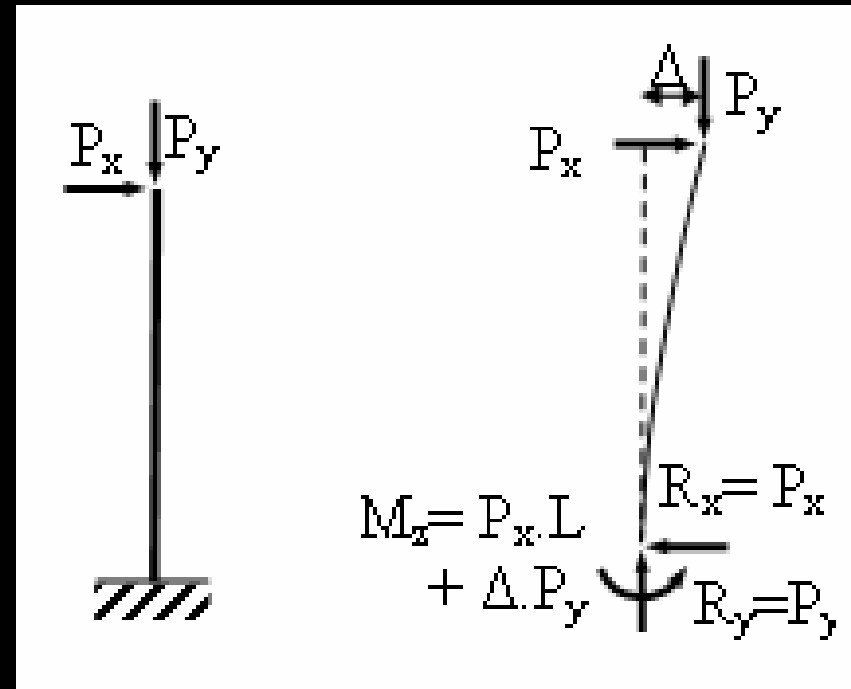
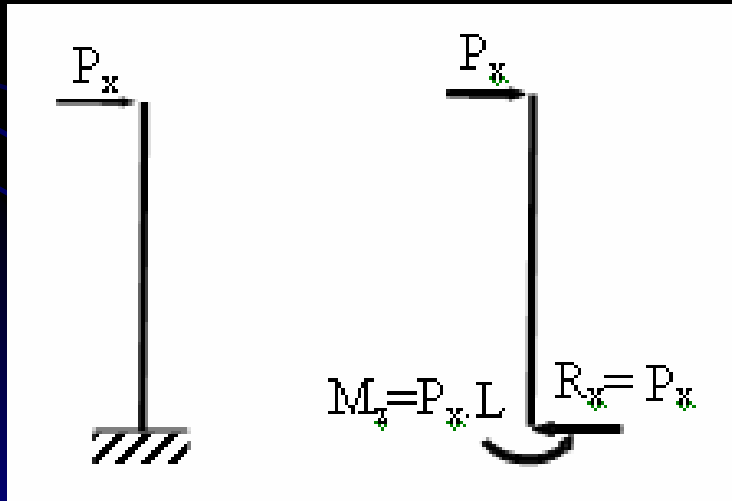
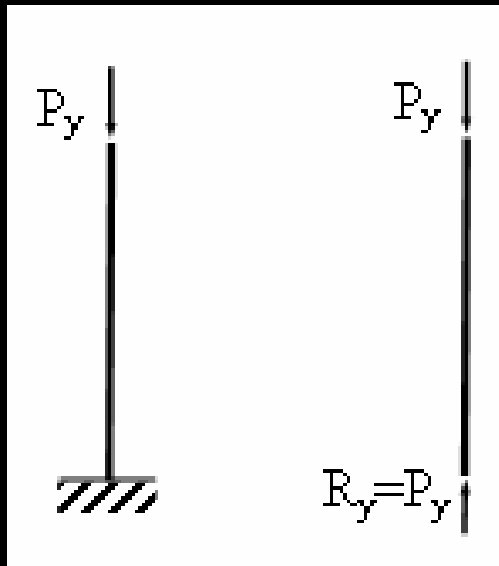
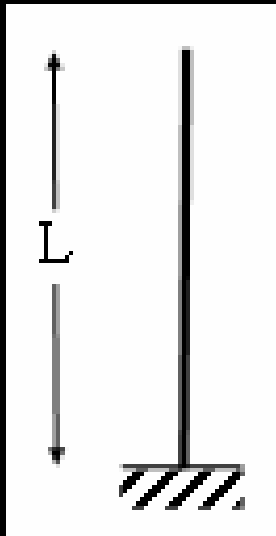
$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad t = b$$

$$Q_z = \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{b \cdot h^2}{8}$$



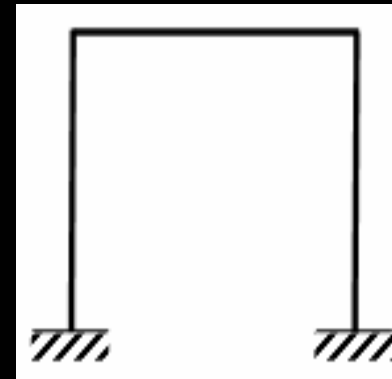
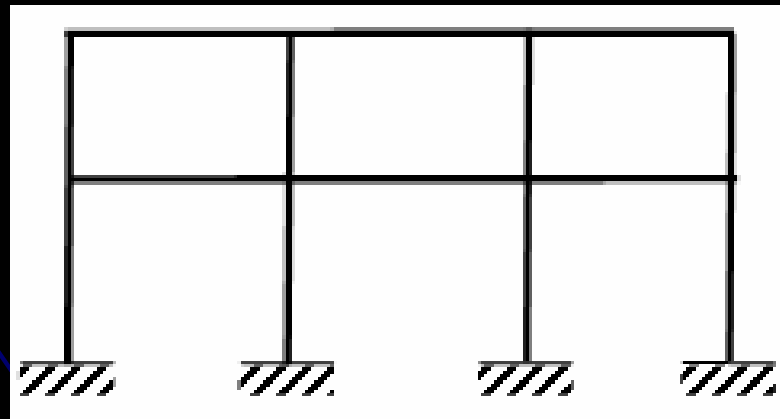
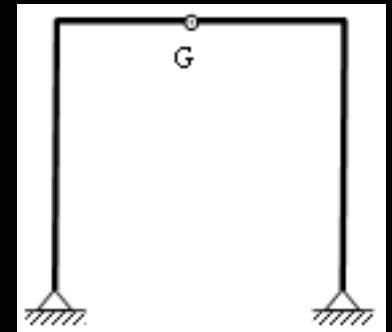
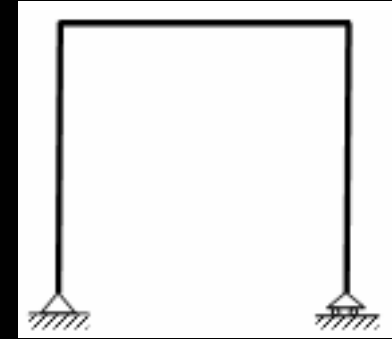
$$\tau_{max}^{ορθ} = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z \cdot t} = \frac{V_y \cdot \frac{b \cdot h^2}{8}}{\frac{b \cdot h^3}{12} \cdot b} = \frac{3 \cdot V_y}{2 \cdot b \cdot h} = 1.5 \cdot \frac{V_y}{A}$$

Φαινόμενα P-Δ



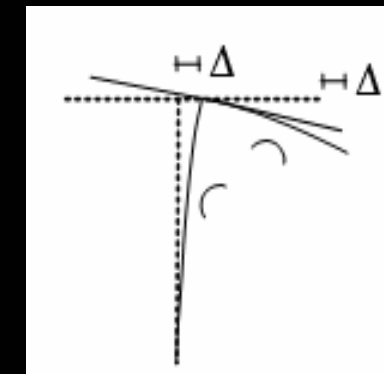
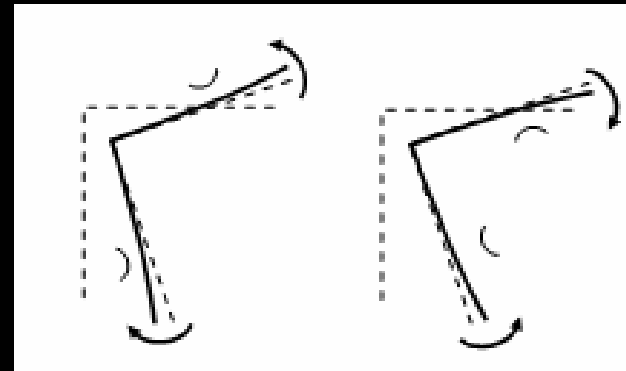
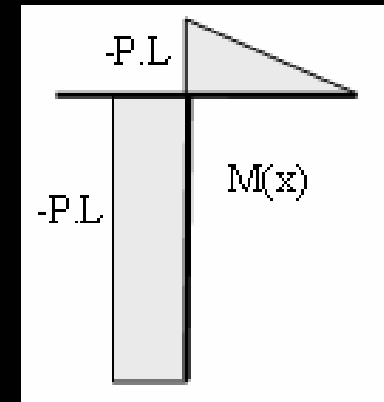
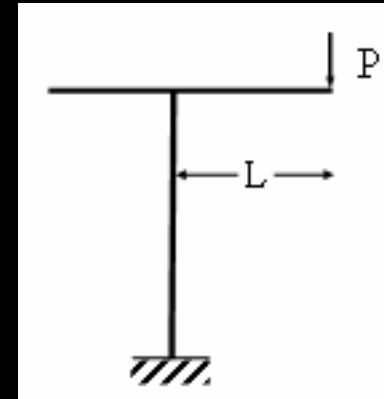
Πλαίσια και πλαισιωτές κατασκευές

- αποτελούνται από δοκούς και υποστυλώματα τα οποία συνδέονται στερεά σε κόμβους υπό γωνία, συνήθως 90°
- οι συνδέσεις επιτρέπουν μεταβίβαση εντατικών μεγεθών
- αμετάβλητες οι γωνίες σύνδεσης στους κόμβους
- έλεγχος ορθότητας αποτελεσμάτων: για να ισορροπεί ένα πλαίσιο πρέπει να ισορροπούν και όλοι οι κόμβοι του
- ΔΚΡ σχεδιάζονται συνήθως από την εφελκύομενη μεριά
 - τοιχία
 - διαγώνιοι



Παραμορφωμένες μορφές δοκών και πλαισίων

- μετακινήσεις δοκών και πλαισίων:
 - κυρίως λόγω καμπτικών παραμορφώσεων
- σχεδιασμός παραμορφωμένης μορφής:
 - κατασκευή διαγράμματος καμπτικών ροπών (ΔKP)
 - καμπυλότητα συμβατή με ΔKP
 - συμβατότητα με δεσμεύσεις στις στηρίξεις
 - συμβατότητα με συνδέσεις μελών
 - αμετάβλητες σταθερές συνδέσεις κόμβων
 - ευκρινής καθορισμός
 - της φοράς μετατοπίσεων και στροφών
 - της καμπυλότητας (κοίλα)
 - των σημείων καμπής
 - ισορροπία κόμβων



***Καλή επιτυχία στο
αυριανό διαγώνισμα!!!***