

6. Εισαγωγή στο Πρόγραμμα Ανάλυσης GT- *Strudl*

Εαρινό εξάμηνο 2021

Πέτρος Κωμοδρόμος
komodromos@ucy.ac.cy

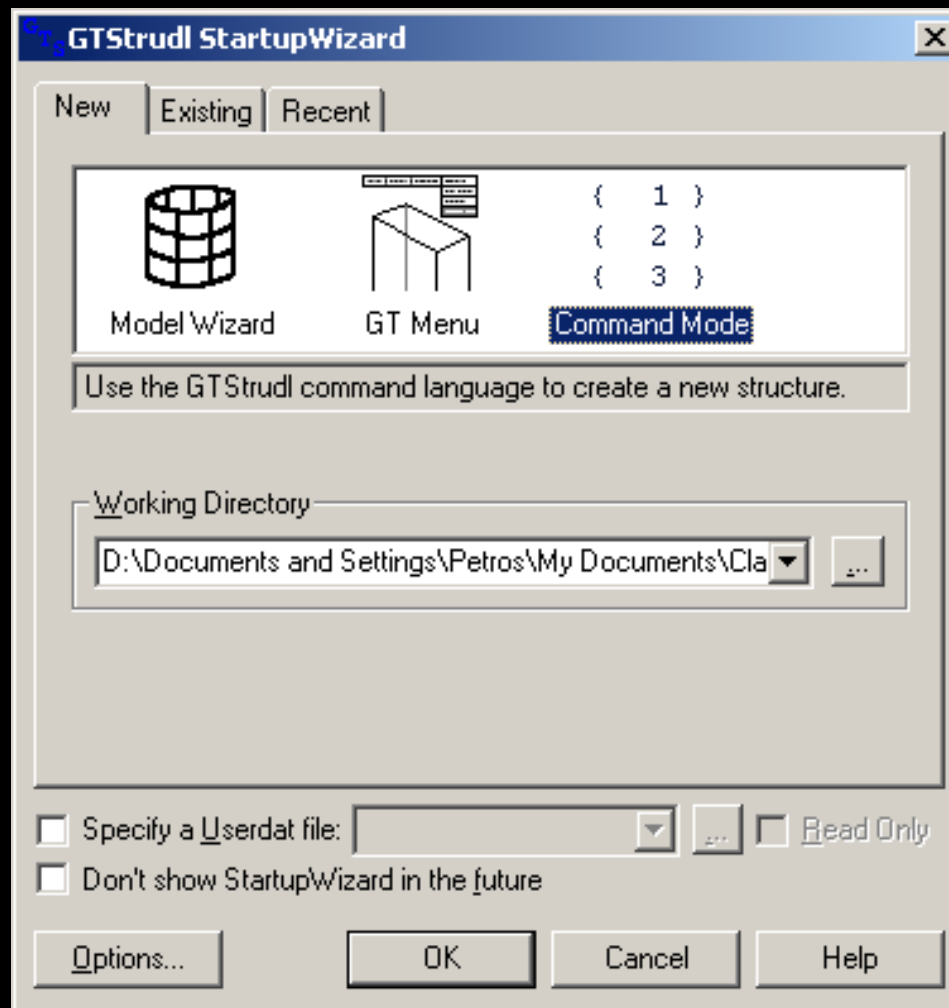
<http://www.eng.ucy.ac.cy/petros>

Γενική Περιγραφή *GT- Strudl*

- Το *GT- Strudl* (*Georgia Tech - Structure Design Language*) είναι ένα από τα πρώτα και πιο αξιόπιστα λογισμικά πακέτα στατικής και δυναμικής ανάλυσης κατασκευών πολιτικού μηχανικού.
 - Η αρχική ανοικτή έκδοση του *Strudl* δημιουργήθηκε και αναπτύχθηκε στο *Massachusetts Institute of Technology (MIT)*
 - Στη συνέχεια την ανάπτυξη και διάθεση του ανέλαβε η *Georgia Tech Research Corp.* του *Georgia Institute of Technology*
- Το πρόγραμμα αυτό, έχει πολύ ισχυρές δυνατότητες ανάλυσης πολύπλοκων κατασκευών με πολύ ψηλό επίπεδο απόδοσης και ακρίβειας.
- Επίσης, παρέχει πολύ καλές δυνατότητες γραφικής παρουσίασης της κατασκευής, καθώς και τροποποίησης της σχεδίασης της.
- Αυτή σύντομη εισαγωγή παρέχει κάποιες πολύ βασικές εντολές και λειτουργίες που προσφέρει το *GTStrudl* χρησιμοποιώντας κυρίως το *Command Mode*.

Περιβάλλον εισαγωγής εντολών – *Command mode*

- Για την εισαγωγή στο περιβάλλον εντολών κατά την έναρξη του GT-Strudl, επιλέγουμε το *Command Mode*



Για την
εισαγωγή
εντολών
πληκτρολογούμε
στο πεδίο
Command, στο
κάτω μέρος του
παραθύρου:

```
GT STRUDL 28 Output - GTStrudl
File Edit Modeling Analysis Results SteelDesign RC_Design Tools View Help
[Icons]
No access, use, transfer, duplication or disclosure thereof may be
made except under a license agreement executed by GTRC or its
authorized representatives and no right, title or interest thereto
is conveyed or granted herein, notwithstanding receipt or possession
hereof. Decompilation of the object code is strictly prohibited.

Georgia Tech Research Corporation
Georgia Institute of Technology
Atlanta, Georgia 30332 U.S.A.

Copyright (c) 2004 GTRC
ALL RIGHTS RESERVED.

# Sat Feb 10 13:28:46 2007

1GTICES/C-NP 2.5.0 MD-NT 2.0, January 1995.
Proprietary to Georgia Tech Research Corporation, U.S.A.

Reading password file X:\Gtstrudl\28\password28.pwd
CI-i-audfile, Command AUDIT file FILE1328.aud has been activated.

*** G T S T R U D L ***
RELEASE DATE          VERSION          COMPLETION NO.
January 2005          28.0          4627

**** ACTIVE UNITS - LENGTH WEIGHT ANGLE TEMPERATURE TIME
**** ASSUMED TO BE INCH POUND RADIAN FAHRENHEIT SECOND

( 1) > $ -----
( 2) > $ This is the Common Startup Macro; put your company-wide startup commands here.
( 3) > $ You can edit this file from Tools -- Macros. Click "Startup" and then "Edit".
( 4) > $ -----

[Command: ]
Ready Inches Pounds Radians Fahrenheit Seconds February 10, 2007 1:29 PM
```

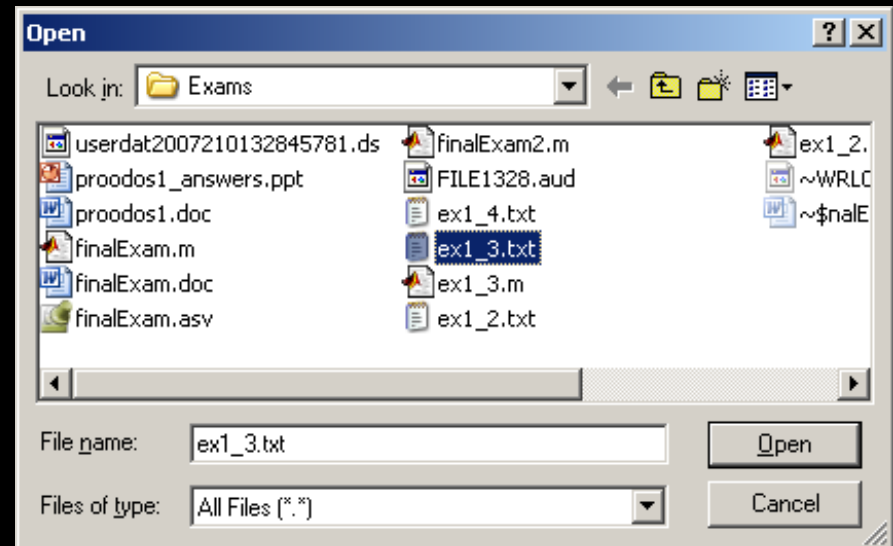
Περιβάλλον εισαγωγής εντολών – Command mode

- Όταν για την εκτέλεση ενός προβλήματος ανάλυσης έχουμε μια μεγάλη ακολουθία εντολών το GT Strudl μας δίνει τη δυνατότητα να τις φορτώνουμε από κάποιο αρχείο όπου τις αποθηκεύουμε
- Τα αρχεία αυτά μπορούν να δημιουργηθούν σε μορφή απλού αρχείου εντολών το οποίο μπορούμε να εκτελέσουμε εκ των υστέρων ανοίγοντας το με το GT Strudl :

>> File >> Open >> Look in:

επιλέγουμε το directory που έχουμε αποθηκεύσει το πρόγραμμα

>> Files of type: All types (*.*)



Γενικές πληροφορίες από το Help του *GT-Strudl*

The screenshot shows the GT-Strudl software interface. The main window displays a text-based output of a structural analysis. The Help menu is open, showing a list of reference manuals. The table below shows the resultant joint loads for six joints.

PROBLEM - ex1_3 TITLE - PLANE TRUSS STRUCTURE

ACTIVE UNITS MM N RAD DEGC SEC

--- LOADING - 1 APPLIED JOINT LOADS

RESULTANT JOINT LOADS SUPPORTS

JOINT		/-----FORCE-----//			-----MO-----	
		X FORCE	Y FORCE	Z FORCE	X MOMENT	Y MO:
1	GLOBAL	243902.4531250	0.0000000			
2	GLOBAL	76904.1562500	57678.1171875			
3	GLOBAL	0.0000000	-274977.1250000			
4	GLOBAL	235290.9531250	-176468.2187500			
5	GLOBAL	243902.4531250	0.0000000			
6	GLOBAL	0.0000000	-206232.8281250			

{ 58) >
{ 59) > \$FINISH
{ 59) >

Command:

Reference Manual, Volume 1: General commands, basic frame analysis

Σχόλια

- Ο χρήστης μπορεί να περιλάβει πληροφορίες με μορφή σχολίων σε όλο το αρχείο χρησιμοποιώντας το σύμβολο \$.
- Τέτοια σχόλια είναι ιδιαίτερα χρήσιμα καθώς μπορούν να διευκρινίσουν περαιτέρω το πρόβλημα που εισάγεται για το χρήστη αλλά και για οποιονδήποτε άλλον θελήσει να εκτελέσει το πρόγραμμα.

Σύντομη Περιγραφή Βασικών Εντολών του *GT Strudl*

<i>STRUDL '...''...'</i>	STRUDL 'όνομα προβλήματος 1-8 χαρακτήρ.' 'τίτλος προβλήματος 1-64 χαρακτήρ.'
<i>§...</i>	Οτιδήποτε μετά το σύμβολο § θεωρείται σχόλιο και δεν εκτελείται
	<i>Τύπος κατασκευής</i>
<i>TYPE PLANE TRUSS</i>	Επίπεδο δικτύωμα
<i>TYPE PLANE FRAME</i>	Επίπεδος πλαίσιακός φορέας
<i>TYPE SPACE TRUSS</i>	Χωρικό δικτύωμα
<i>TYPE SPACE FRAME</i>	Χωρική πλαίσιακός κατασκευή
<i>UNITS ...</i>	<i>Καθορισμός μονάδων μέτρησης</i>
<i>- Inches, Feet, Millimeters, Centimeters, Meters</i>	- Μήκους
<i>- Pounds, Kips, Tons, Kilograms, Metric Tons, Newtons, KiloNewtons</i>	- Δύναμης
<i>- Radians, Degrees, Cycles</i>	- Στροφής

JOINT COORDINATES

Συντεταγμένες κόμβων

... ..

Κόμβος Συντεταγμ. X Συντεταγμ. Y Συντεταγμ. Z

STATUS SUPPORT JOINTS ...

Καθορισμός δεσμεύσεων (στηρίξεων) κόμβων

JOINT RELEASES

Καθορισμός ελευθεριών στηρίξεων

... FORCE ...

Κόμβος ΔΥΝΑΜΗ άξονας ελευθερίας

... MOMENT ...

Κόμβος ΡΟΠΗ άξονας ελευθερίας

MEMBER INCIDENCES

Καθορισμός συνδεσμολογίας μελών

... ..

Μέλος Κόμβος Αρχής Κόμβος Τέλους

CONSTANTS

Σταθερές

... ..

Σταθερά Τιμή σταθεράς

MATERIAL ...

Υλικό κατασκευής ράβδων ή δοκών (μπορούν να καθοριστούν αυτόματα ιδιότητες του υλικού)

π.χ: STEEL CONCRETE

<i>MEMBER PROPERTIES</i>	<i>Ιδιότητες μελών</i>
... ..	Μέλος ιδιότητα (AX, AY, AZ, IX, IY, IZ) Τιμή
<i>LOADING ... ('...')</i>	Φόρτιση αριθμός φόρτισης ('χαρακτηρισμ. φόρτισης')
<i>JOINT LOADS</i>	<i>Επικόμβια φορτία</i>
... FORCE	Κόμβος ΔΥΝΑΜΗ άξονας φόρτισης (+/-)Τιμή
... MOMENT	Κόμβος ΡΟΠΗ άξονας φόρτισης (+/-)Τιμή
<i>MEMBER LOADS</i>	<i>Φόρτιση μέλους/μελών</i>
... FORCE ... LINEAR WA ... WB LA LB	Μέλος ΔΥΝΑΜΗ άξονας φόρτισης ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ WA (+/-) τιμή φορτίου στο A, WB (+/-) τιμή φορτίου στο B, LA σημείο φόρτισης A (από την αρχή του μέλους), LB σημείο φόρτισης B (από την αρχή του μέλους)
... FORCE ... UNIFORM W ... LA ... LB ...	Μέλος ΔΥΝΑΜΗ άξονας φόρτισης ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ W (+/-) τιμή, LA σημείο φόρτισης A (από την αρχή του μέλους), LB σημείο φόρτισης B (από την αρχή του μέλους)
... FORCE ... CONC P ... L ...	Μέλος ΔΥΝΑΜΗ άξονας φόρτισης ΣΥΓΚΕΝΤΡ. ΦΟΡΤΙΟ P (+/-)τιμή, L σημείο φόρτισης
... MOMENT... CONC M... L...	Μέλος ΡΟΠΗ άξονας φόρτισης ΣΥΓΚΕΝΤΡ. ΡΟΠΗ M (+/-)τιμή, L σημείο φόρτισης
<i>JOINT DISPLACEMENTS</i>	<i>Μετακινήσεις κόμβου/ων</i>
... DISPL	Μέλος ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ άξονας μετατόπ. (+/-)Τιμή

QUERY

Συνοψίζονται οι εντολές εισόδου

(παρουσιάζεται μήνυμα εάν η κατασκευή δεν είναι ευσταθής, εάν κάποιο από τα δεδομένα εισόδου λείπει ή ενδέχεται να είναι λανθασμένο)

STIFFNESS ANALYSIS

Στατική ανάλυση (ανάλυση με τη μέθοδο δυσκαμψίας)

OUTPUT DECIMAL ...

Αριθμός σημαντικών ψηφίων εξόδου

<i>LIST DISPLACEMENTS</i>	Παρουσιάζει τις μετακινήσεις των κόμβων
<i>LIST REACTIONS</i>	Παρουσιάζει τις αντιδράσεις στις στηρίξεις
<i>LIST FORCES</i>	Παρουσιάζει τα εντατικά μεγέθη των μελών
<i>CINPUT</i>	Επιτρέπει την εισαγωγή περαιτέρω εντολών από το πληκτρολόγιο
<i>FINISH</i>	Τερματίζει την εκτέλεση του <i>GT Strudl</i>

GT Menu

- Αντίστοιχα με το περιβάλλον εισαγωγής εντολών υπάρχει και το περιβάλλον εισαγωγής γραφικά (*GT Menu*) και οι εντολές που αναφέρονται αναλυτικά πιο πάνω, μπορούν να εισαχθούν με αντίστοιχο γραφικό τρόπο.



GTMenu Structural Modeling Tool Version 28

File Create Edit Display Results Check Options Units Coordinate System Utilities Help

Print Inquire Active 1 Zoom Label Rotate Redraw Redraw Solid View

Select from a Menu with a left-click, get HELP with a right-click or click in the Graphics window.

Display Model: Default Mode: All

UNITS: MM N DEG CEN SEC Arrow Keys = Rotate

Member & Element

Shrink Factor: 1.0 (0.1-1.0)

Mesh Boundary Outline

Add Interior Detail

Generate Display List

Mark Loads

Joint Member

Element All

Mark Properties

Section Material

All types

Mark Joint

Supported D.O.F.

Draw Member

Releases

Section Names

Local Axes

Beta/Profiles

Draw Element

Incidence Order

Planar Axes

Color by Thickness

Hit List All Line Plane Volume Bound Unbound Point Joint Coord Global Pln

Scope Environment

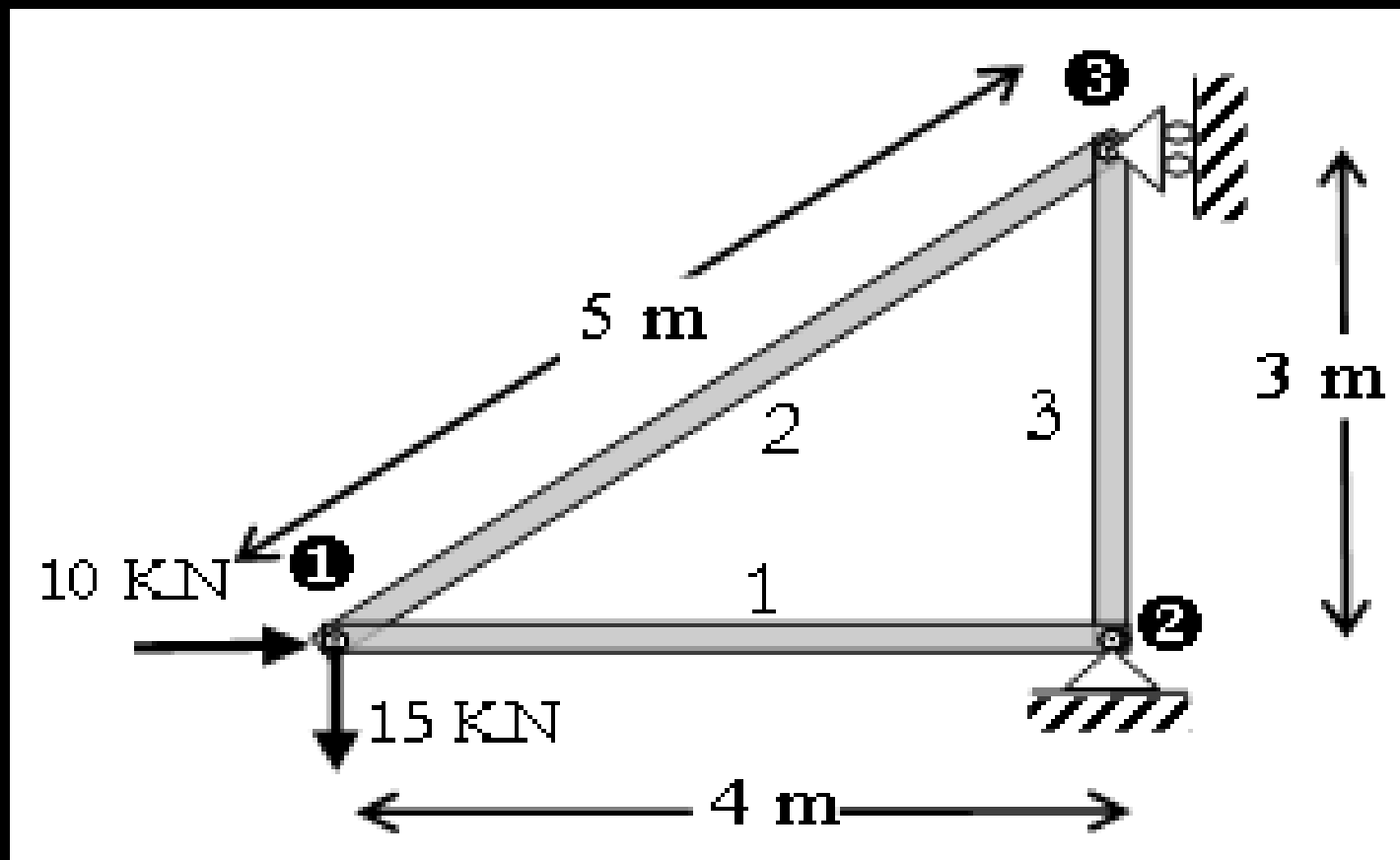
- Επίσης, υπάρχει και το Scope Environment για έλεγχο των δεδομένων και αποτελεσμάτων της ανάλυσης:

The screenshot displays the GTStrudl software interface. The main window shows a 3D coordinate system with axes X, Y, and Z. A menu is open, listing various analysis options, with 'Scope Environment' highlighted. A dialog box titled 'Scope Environment' is visible, showing a 3D coordinate system and input fields for X, Y, and Z coordinates, all set to 0.0. A 'STRUDL Scope Output' window displays the following data:

```
STRUDL Scope Output
X 5000.00000
Y 7000.00000
Z 0.00000
COORD JOINT 1
X 0.00000
Y 3000.00000
Z 0.00000
DISP JT 7 LD 1
X -1.21951
Y 0.82493
Z 0.00000
```

The interface also shows a 'Command:' field at the bottom, which is currently empty. The status bar at the bottom indicates 'Ready' and shows units: Millimeters, Newtons, Degrees, Centigrade, Seconds, and the date/time: February 10, 2007, 1:59 PM.

Παράδειγμα Επίλυσης Δικτυώματος



$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$A = 0.001 \text{ m}^2$$

Αρχείο Δεδομένων

```
STRUDL 'Paradeigma-1' 'Epipedo Diktywma'  
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
```

```
$ Typos kataskeyhs  
TYPE PLANE TRUSS
```

```
$ Ka8orismos monadwn  
UNITS M N CENTIGRADE
```

```
$ Syntetagmenes kombwn  
JOINT COORDINATES
```

```
1 0 0  
2 4 0  
3 4 3
```


\$ Καθρισμός σθρίσεων

STATUS SUPPORT JOINTS 2 3

\$ Καθρισμός ελεύθερων

JOINT RELEASES

3 FORCE Y \$ Roller support

\$ Καθρισμός συνδεσμολογίας μελών

MEMBER INCIDENCES

1 1 2

2 1 3

3 2 3

\$ Καθορισμός μετρού ελαστικότητας

CONSTANTS

E 200E9 ALL

\$ Καθορισμός γεωμετρικών χαρακτηριστικών μελών

MEMBER PROPERTIES

1 TO 3 AX 0.001

\$ Καθορισμός φορέων

LOADING 1 'APPLIED JOINT LOADS'

\$ Επικομβία φορέα

JOINT LOADS

1 FORCE X 10000

1 FORCE Y -15000

QUERY

STIFFNESS ANALYSIS

UNITS mm KN CENTIGRADE

OUTPUT DECIMAL 5

LIST FORCES

LIST DISPLACEMENTS

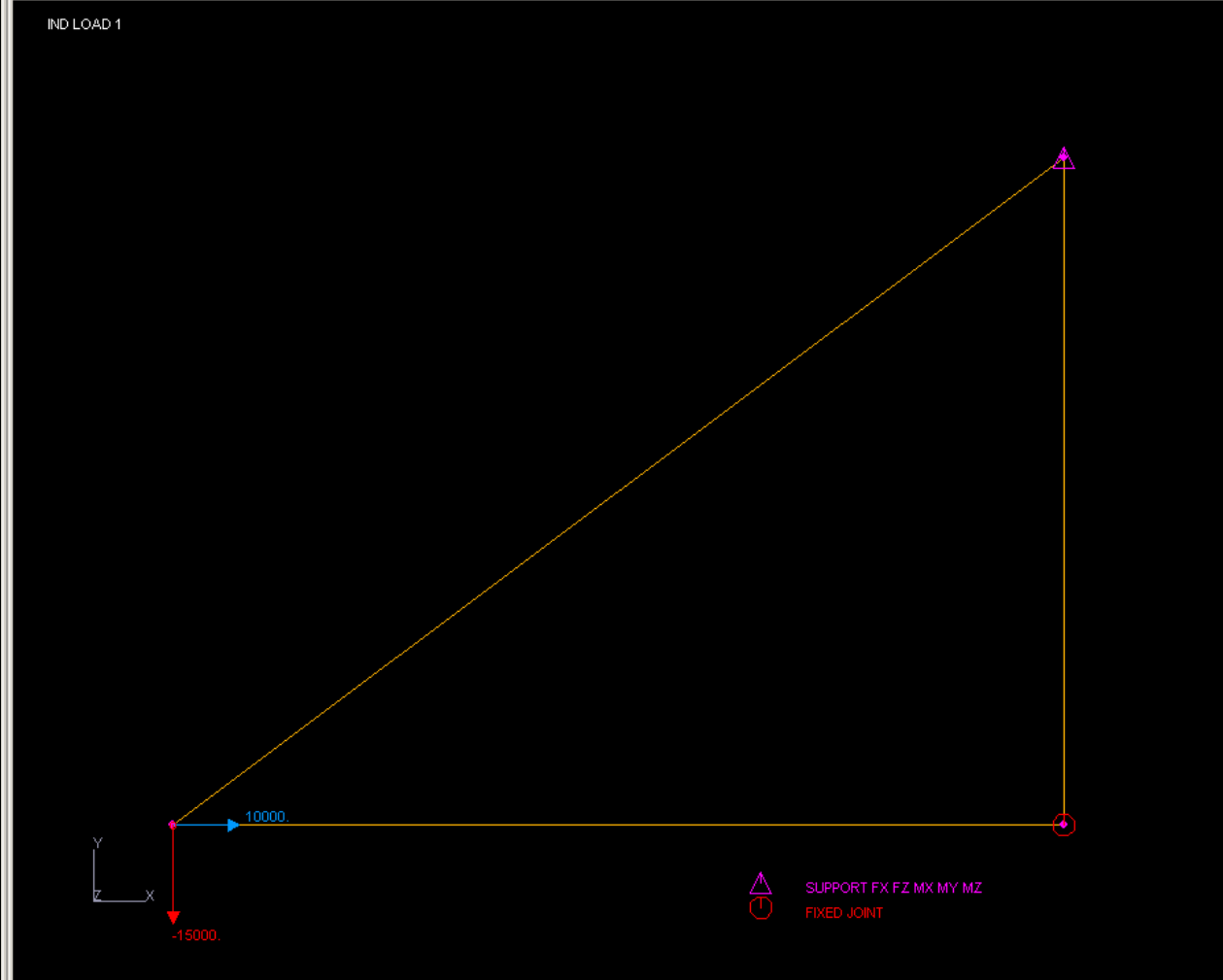
CINPUT

\$FINISH

Print Inquire **Active 1** Zoom Label Rotate Redraw Redraw Solid View

Display Load: Default Mode: All
 No applied member loads.
 No elements in model.

UNITS: M N DEG CEN SEC Arrow Keys = Rotate



Display Load

Load Scale
 Factor: (0.1-5.0)

Coordinate System
 Global Sys Input Sys

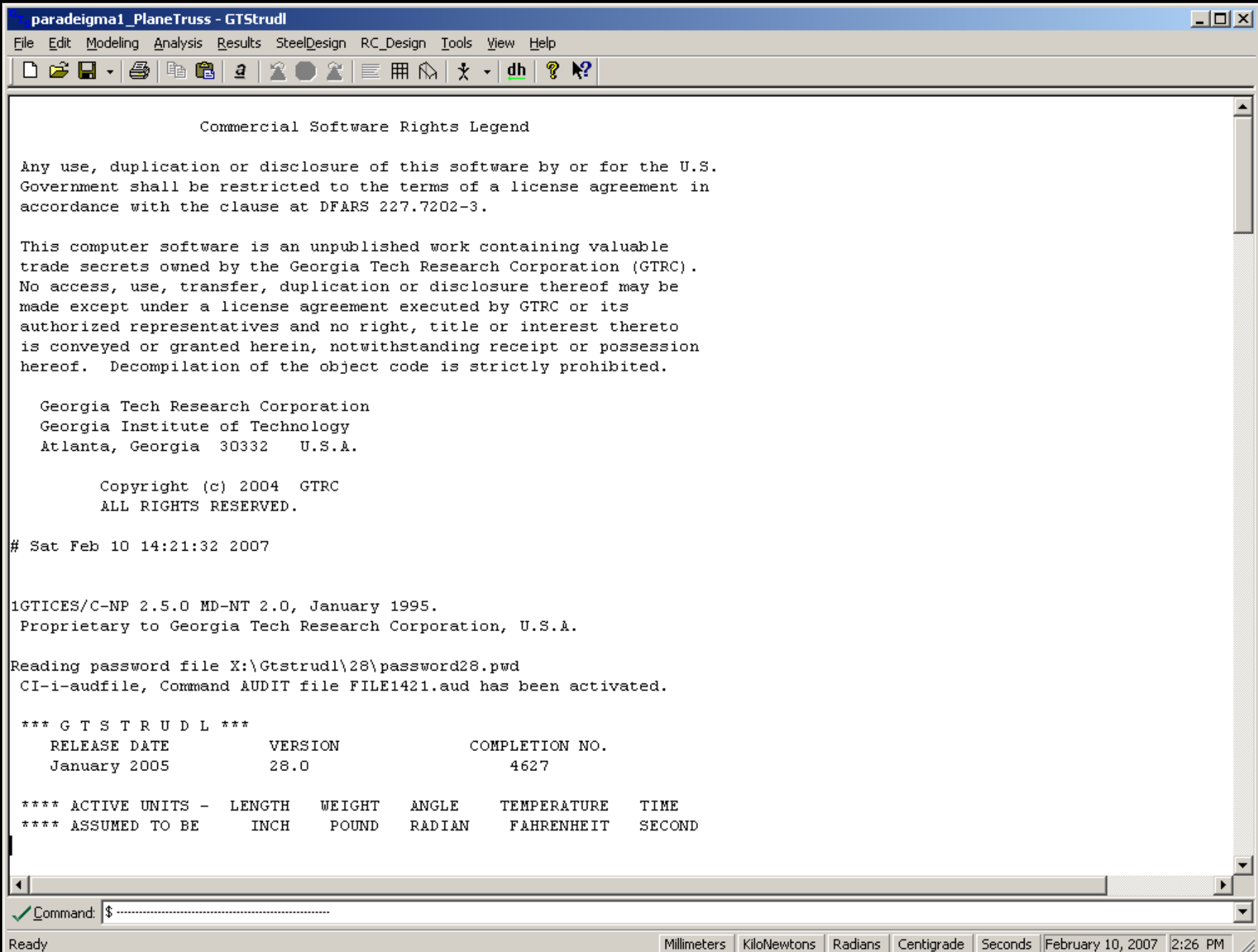
Format
 Vectors & Values
 Vectors Only

Range
 All Loadings
 Fractional Limit
 Absolute Value Limit

Type
 All Conc & Dist
 Joint Concentrated
 Member Distributed
 Element

Load Type
 Forces & Moments
 Jt. Displacement/Mem. Distortion
 Temperature

Select Load:



paradeigma1_PlaneTruss - GTStrudl

File Edit Modeling Analysis Results SteelDesign RC_Design Tools View Help

1) > \$ -----
 2) > \$ This is the Common Startup Macro; put your company-wide startup commands here.
 3) > \$ You can edit this file from Tools -- Macros. Click "Startup" and then "Edit".
 4) > \$ -----
 5) > CINPUT -
 6) > 'D:\Documents and Settings\Petros\My Documents\Classes\CEE325\CEE325_Spring2007\GTStrudl\paradeigma1_PlaneTruss.
 7) > STRUDL 'Paradeigma-1' 'Epipedo Dikyyma'

```

*****
*
* *****                      G T S T R U D L                      *
* *****                      *
* ** ** *
* ** *      ***** ***** ***** ** ** ***** ** *
* ** ***** ***** ***** ***** ** ** ***** ** *
* ** ***** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** *
* ** ** *      ***** ** ***** ** ** ** ** ** ** *
* ***** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** *
* ** ** ***** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** *
* ** ***** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** *
*
* **
* **
* **
*          OWNED BY AND PROPRIETARY TO THE
*          GEORGIA TECH RESEARCH CORPORATION
*
* RELEASE DATE      VERSION      COMPLETION NO.
* January 2005      28.0          4627
*
*****

```

```

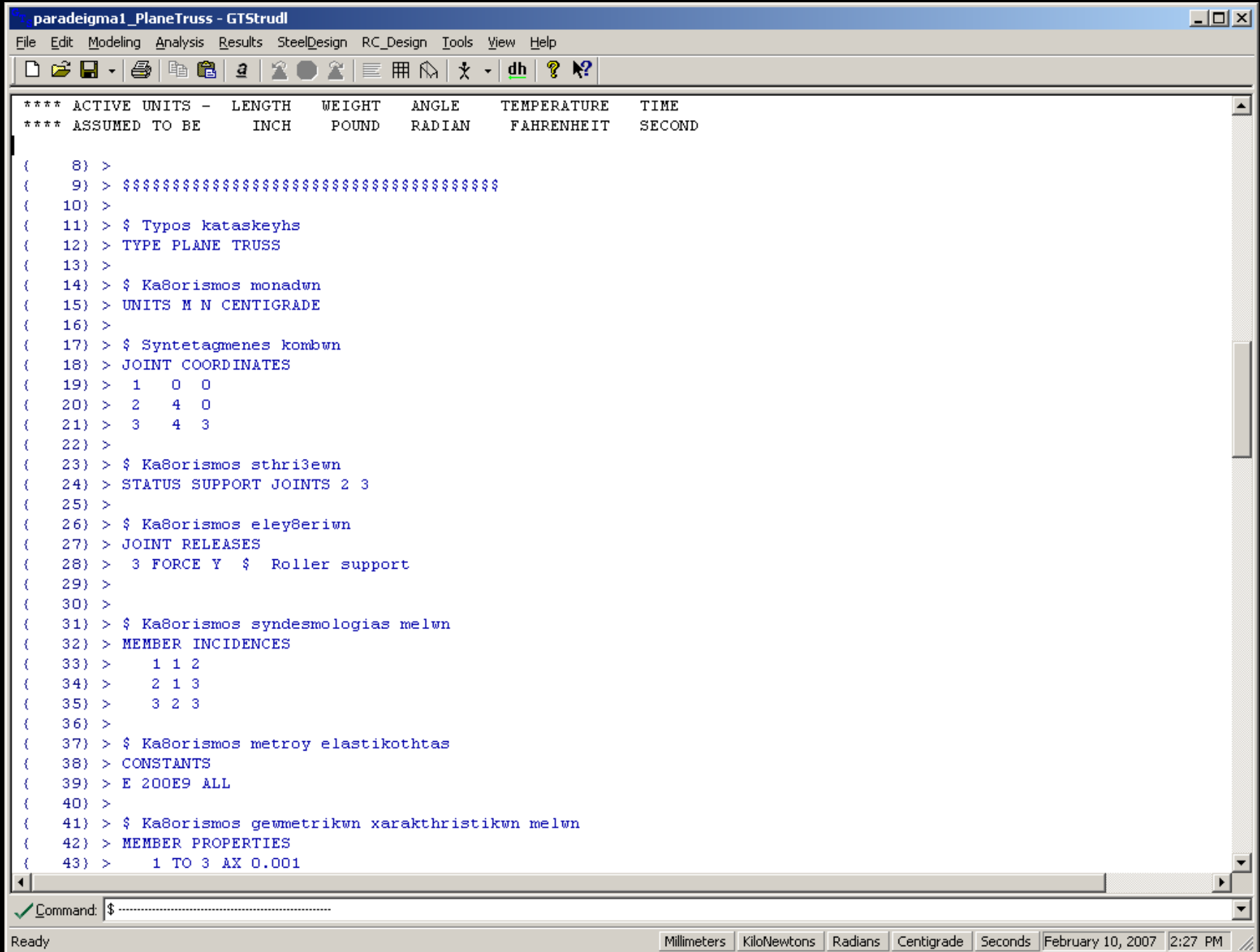
**** ACTIVE UNITS -   LENGTH   WEIGHT   ANGLE   TEMPERATURE   TIME
**** ASSUMED TO BE   INCH     POUND   RADIAN  FAHRENHEIT   SECOND

```

✓ Command: \$-----

Ready

Millimeters KiloNewtons Radians Centigrade Seconds February 10, 2007 2:27 PM



```

paradeigma1_PlaneTruss - GTStrudl
File Edit Modeling Analysis Results SteelDesign RC_Design Tools View Help
[Icons]
( 44) >
( 45) > $ Ka8orismos forisewn
( 46) > LOADING 1 'APPLIED JOINT LOADS'
( 47) > $ Epikombia fortia
( 48) > JOINT LOADS
( 49) > 1 FORCE X 10000
( 50) > 1 FORCE Y -15000
( 51) >
( 52) > QUERY

-----

**** CURRENT GTSTRUDL PROBLEM STATISTICS ****

ACTIVE UNITS:      M      N      RAD      DEGC      SEC

INPUT MODE: ADDITIONS          SCAN MODE INITIATED: NO

CURRENT STRUCTURAL TYPE: PLANE TRUSS

ACTIVE      JOINTS      MEMBERS      ELEMENTS      SUPERELEMENTS
INACTIVE    0              0              0              0

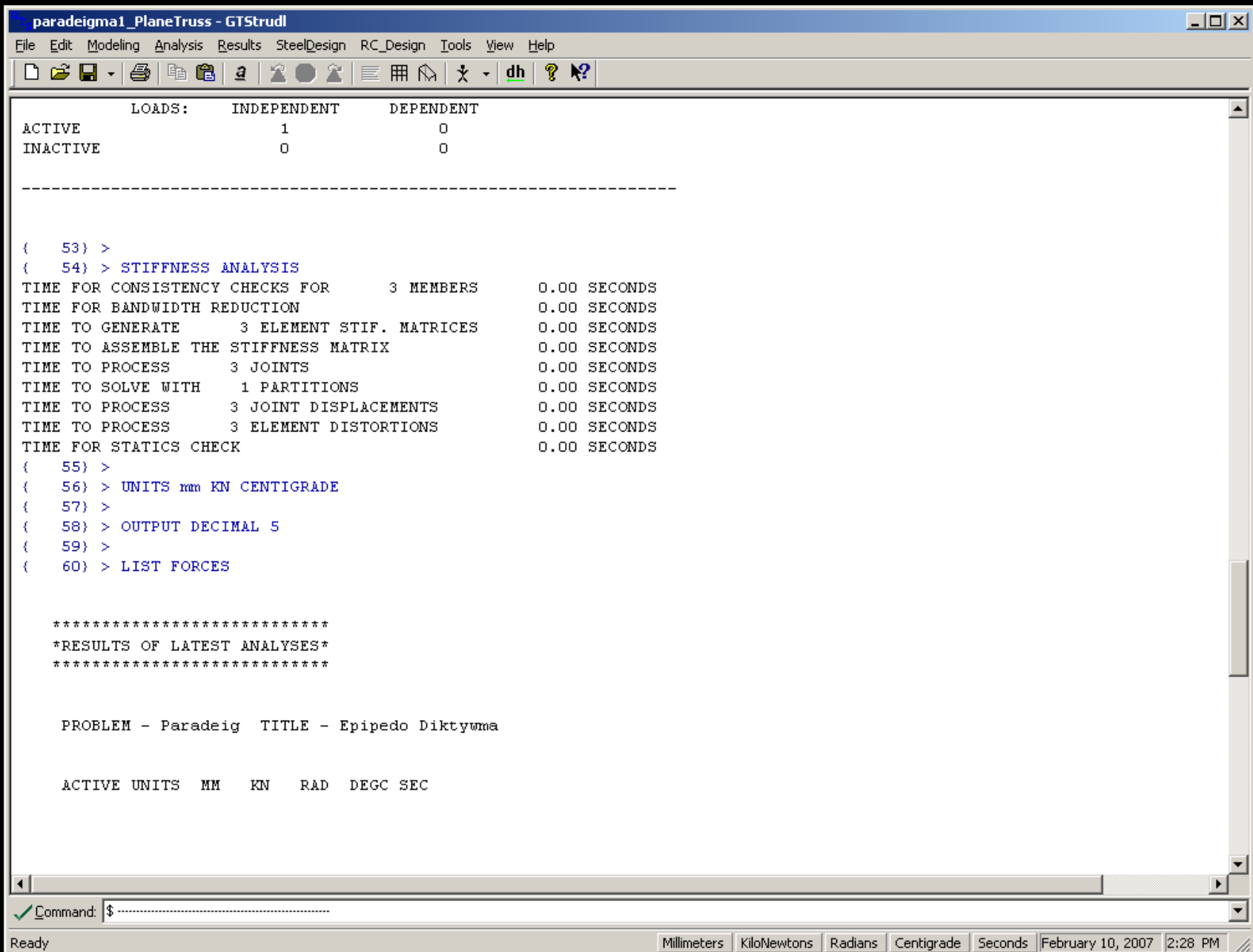
RIGID BODIES      0
JOINT TIES        0

LOADS:  INDEPENDENT  DEPENDENT
ACTIVE      1              0
INACTIVE    0              0

-----

Command: $
Ready
[Units: Millimeters KiloNewtons Radians Centigrade Seconds February 10, 2007 2:28 PM]

```

```
paradeigma1_PlaneTruss - GTStrudl
File Edit Modeling Analysis Results SteelDesign RC_Design Tools View Help
[Icons]
( 58) > OUTPUT DECIMAL 5
( 59) >
( 60) > LIST FORCES

*****
*RESULTS OF LATEST ANALYSES*
*****

PROBLEM - Paradeig TITLE - Epipedo Diktywma

ACTIVE UNITS MM KN RAD DEGC SEC

-----
--- LOADING - 1 APPLIED JOINT LOADS
-----

MEMBER FORCES

MEMBER JOINT /----- FORCE -----//----- MOMENT -----/
                AXIAL      SHEAR Y      SHEAR Z      TORSIONAL      BENDING Y      BENDING Z
1           2           -30.00000
2           3           25.00000
3           3           -15.00000

( 61) > LIST DISPLACEMENTS

Command: $-----
Ready Millimeters KiloNewtons Radians Centigrade Seconds February 10, 2007 2:29 PM
```

paradeigma1_PlaneTruss - GTStrudl

File Edit Modeling Analysis Results SteelDesign RC_Design Tools View Help

{ 61} > LIST DISPLACEMENTS

 RESULTS OF LATEST ANALYSES

PROBLEM - Paradeig TITLE - Epipedo Diktywma

ACTIVE UNITS MM KN RAD DEGC SEC

--- LOADING - 1 APPLIED JOINT LOADS ---

RESULTANT JOINT DISPLACEMENTS SUPPORTS

JOINT		DISPLACEMENT			ROTATION		
		X DISP.	Y DISP.	Z DISP.	X ROT.	Y ROT.	Z ROT.
2	GLOBAL	0.00000	0.00000				
3	GLOBAL	0.00000	-0.22500				

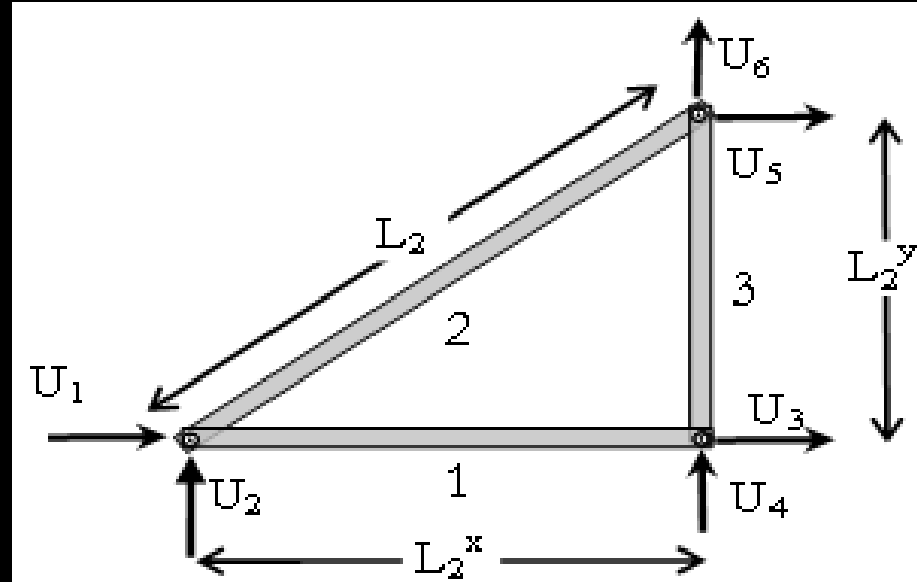
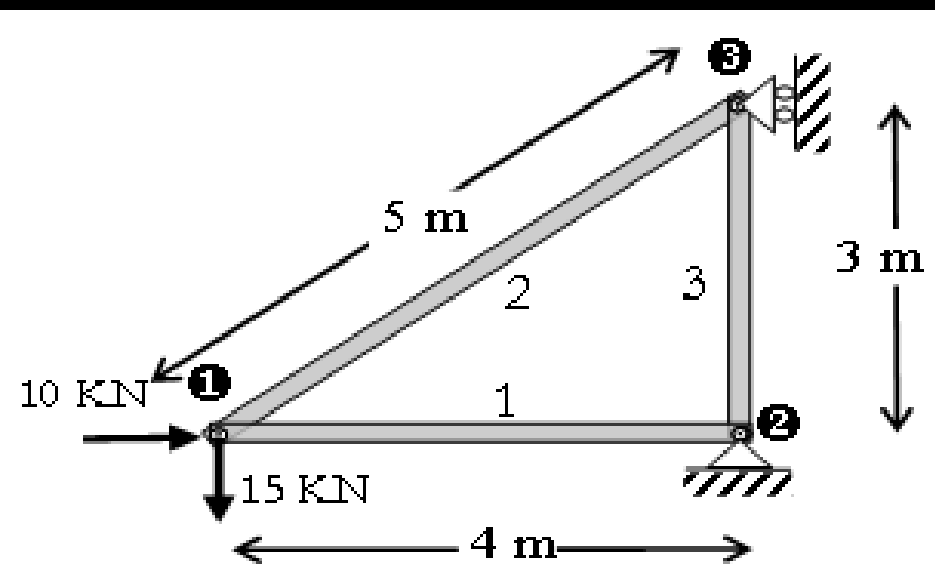
RESULTANT JOINT DISPLACEMENTS FREE JOINTS

JOINT		DISPLACEMENT			ROTATION		
		X DISP.	Y DISP.	Z DISP.	X ROT.	Y ROT.	Z ROT.
1	GLOBAL	0.60000	-2.06667				

Command: \$

Ready Millimeters KiloNewtons Radians Centigrade Seconds February 10, 2007 2:30 PM

Αναλυτική Επίλυση



$$E = 200 \text{ GPa}$$



$$A = 0.001 \text{ m}^2$$

Ράβδος	L	AE/L
1	4	$5 \cdot 10^7$
2	5	$4 \cdot 10^7$
3	3	$6.667 \cdot 10^7$

Ράβδος	L	AE/L
1	4	$5 \cdot 10^7$
2	5	$4 \cdot 10^7$
3	3	$6.667 \cdot 10^7$

→

$$\underline{k}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 5 \cdot 10^7$$

→

$$\underline{k}'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 4 \cdot 10^7$$

→

$$\underline{k}'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 6.667 \cdot 10^7$$

$$\underline{s}'_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{u}'_m \Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix} = \underline{k}'_m \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_m = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

Ράβδος	Κόμβος αρχής	Κόμβος τέλους	θ_m	$\cos\theta_m$	$\sin\theta_m$
1	1	2	0°	1	0
2	1	3	36.87°	0.8	0.6
3	2	3	90°	0	1

$$\rightarrow \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m^T \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m$$

$$\rightarrow \underline{k}_1 = \underline{T}_1^T \cdot \underline{k}'_1 \cdot \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\rightarrow \underline{k}_2 = \underline{T}_2^T \cdot \underline{k}'_2 \cdot \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 2.56 & 1.92 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & -1.92 & -1.44 \\ -2.56 & -1.92 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\rightarrow \underline{k}_3 = \underline{T}_3^T \cdot \underline{k}'_3 \cdot \underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6.667 & 0 & 6.667 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	U_1	U_2	U_3	U_4
2	U_1	U_2	U_5	U_6
3	U_3	U_4	U_5	U_6

Ξεκινώντας από ένα μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, \underline{K} , με μηδενικά όλα του τα στοιχεία, αθροίζονται διαδοχικά τα μητρώα δυσκαμψίας όλων των επιμέρους μελών, λαμβάνοντας υπόψη την πιο πάνω αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας των μελών και της κατασκευής.



$$\begin{array}{c}
 U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6 \\
 \left[\begin{array}{cccccc}
 U_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 U_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 U_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 U_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 U_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 U_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Μητρώο δυσκαμψίας κατασκευής



$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Αυτό το σύστημα εξισώσεων δεν μπορεί να επιλυθεί γιατί το μητρώο δυσκαμψίας \underline{K} είναι ιδιάζων (*singular*), αφού δεν έχουν ορισθεί συνοριακές συνθήκες για να καταστεί ο φορέας σταθερός. Το γεγονός ότι το μητρώο δυσκαμψίας είναι ιδιάζων φαίνεται από το βαθμό (*rank*) του μητρώου, ο οποίος σε αυτή την περίπτωση ισούται με 3 αντί με 6, που είναι ο συνολικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας και συνεπώς και οι διαστάσεις του μητρώου.

Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{R}_f = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,000 \\ -15,000 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N} = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ KIN}$$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} f & f & s & s & s & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} f \\ f \\ s \\ s \\ s \\ f \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{ff} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & -1.44 \\ -1.92 & -1.44 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \quad \underline{\underline{K}}_{fs} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2.56 \\ 0 & 0 & -1.92 \\ 0 & -6.667 & 1.92 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{\underline{K}}_{sf} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 1.92 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \quad \underline{\underline{K}}_{ss} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 \\ 0 & 0 & 2.56 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{bmatrix}$$



$$\underline{R}_f = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,000 \\ -15,000 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N} = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ KN}$$



$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f = \begin{bmatrix} 0.0006 \\ -0.002067 \\ -0.000225 \end{bmatrix} \text{ m} = \begin{bmatrix} 0.600 \\ -2.067 \\ -0.225 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

$$\underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f$$



$$\underline{R}_s = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 1.92 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0.0006 \\ -0.002067 \\ -0.000225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30,000 \\ 15,000 \\ 20,000 \end{bmatrix} \text{ N} = \begin{bmatrix} -30 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ KN}$$

Υπολογισμός εντατικών μεγεθών

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_I = \underline{k}'_I \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}_I = \underline{k}'_I \cdot \underline{T}'_I \cdot \underline{U}_I$$

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 5 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ KN}$$

Υπολογισμός εντατικών μεγεθών

$$\begin{bmatrix} S_1^{x'} \\ S_1^{y'} \\ S_2^{x'} \\ S_2^{y'} \end{bmatrix}_2 = \underline{k}_2 \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}_2 = \underline{k}_2 \cdot \underline{T}_2 \cdot \underline{U}_2$$

$$\begin{bmatrix} S_1^{x'} \\ S_1^{y'} \\ S_2^{x'} \\ S_2^{y'} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ KN}$$

Υπολογισμός εντατικών μεγεθών

$$\begin{bmatrix} S_1^{x'} \\ S_1^{y'} \\ S_2^{x'} \\ S_2^{y'} \end{bmatrix}_3 = \underline{k}'_2 \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}_3 = \underline{k}'_3 \cdot \underline{T}_3 \cdot \underline{U}_3$$



$$\begin{bmatrix} S_1^{x'} \\ S_1^{y'} \\ S_2^{x'} \\ S_2^{y'} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 6.667 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ KN}$$