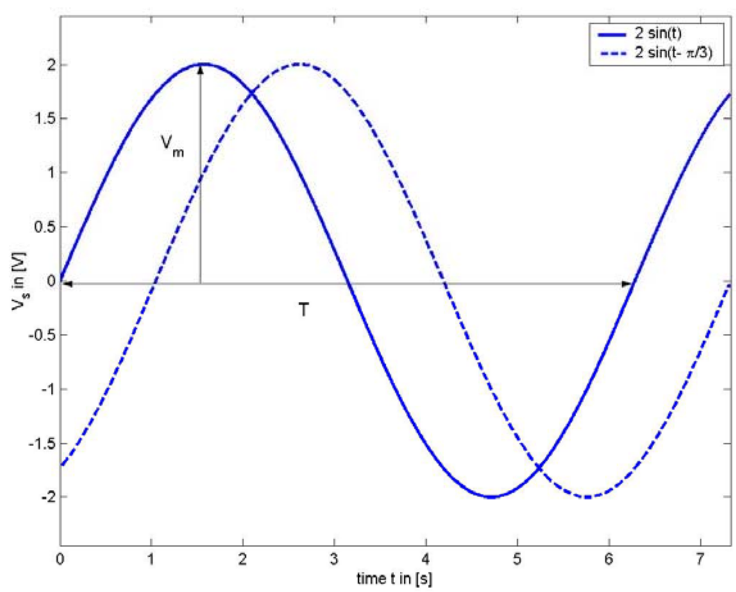
Κυκλώματα εναλλασσόμενης τάσης

Στόχος αυτής της ενότητας του μαθήματος είναι η μελέτη των ηλεκτρικών κυκλωμάτων στα οποία η ηλεκτροκινητήρια δύναμη παρέχεται από πηγή εναλλασσόμενης τάσης. Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε πως τα στοιχεία του κυκλώματος όπως η αντίσταση, ο πυκνωτής και το πηνίο συμπεριφέρνονται σε συνθήκες όπου η τάση της πηγής μεταβάλλεται με το χρόνο. Ο τρόπος μελέτης των κυκλωμάτων αυτών είναι παρόμοιος με αυτό που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυση κυκλωμάτων συνεχούς τάσης όπου ζητούμε να υπολογίσουμε την τάση σε διάφορα σημεία του κυκλώματος, την ένταση, ισχύ, κτλ.

Quiz: Το κύκλωμα ηλεκτροδότησης οικιακών μονάδων στην Κύπρο παρέχει σε κάθε μονάδα τάση 240V στη συχνότητα 50 Hz. Δώστε τη γραφική παράσταση της τάσης αυτής!

Για να μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως μια τάση (σήμα) εναλλασσόμενο, το οποίο θα συμβολίζουμε για συντομία ac, χρειαζόμαστε την κυμματομορφή του. Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με χρονικά αρμονικές πηγές τάσης στις οποίες το σήμα είναι ημιτονοειδές (ο όρος αυτός συμπεριλαμβάνει ημίτονα και συνημίτονα). Το σήμα χρονικά αρμονικής πηγής ac τάσης ορίζεται ως

$$V_s = V_m \sin(\omega t + \varphi)$$



Το πιο πάνω σχήμα δείχνει τις κυμματομορφές δύο σημάτων ac για το χρονικό διάστημα t =[0,2π + π/3]. Το σήμα προεκτείνεται αρμονικά στον άξονα του χρόνου για όσο διάστημα είναι ανοικτή η πηγή (signal generator).
Σύμφωνα με την εξίσωση για να οριστεί το σήμα χρειάζονται οι τιμές V_m , ω και φ. Αυτές ορίζονται ως ακολούθως: Η V_m είναι η απόλυτη μέγιστη τιμή την οποία λαμβάνει το σήμα εντός μιας περιόδου Tα, π.χ. στα σήματα πιο πάνω η V_m = 2V. Συνήθως είναι χρήσιμη και η μέση τετραγωνική τιμή του σήματος V_{rms} η οποία ορίζεται ως $V_{rms=} {V_m}/{\sqrt{2}}$.

Περίοδος του σήματος T [s] *ονομάζεται η χρονική διάρκεια στην οποία το σήμα προεκτείνεται κατά απόσταση ενός μήκους κύματος λ* [m]. *Στο πιο πάνω παράδειγμα και τα δύο σήματα έχουν περίοδο T=2π s. Από την περίοδο T ή ακόμα και τη συχνότητα του σήματος* $f = {1}/{T}$ [Hz], *η τιμή της κυκλική συχνότητα του σήματος ω [rad/s] δίνεται ως* $\omega = 2\pi f = {2\pi}/{T}$.
Η φάση του σήματος, ή γωνία φάσης του σήματος, δηλώνει το βαθμό προήγησης (phase shift) του σήματος ως προς κάποιο άλλο σήμα ή μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή αναφοράς, π.χ. t=0. Θετικές γωνίες φάσης δηλώνουν προήγηση (leading) ενώ για αρνητικές γωνίες η φάση υστερεί (lagging) . Στο πιο πάνω παράδειγμα το σήμα με διακεκομμένες γραμμές προηγείται του άλλου σήματος με διαφορά φάσης φ =π/3 rad/s.

Quiz: Σήμα μήκους κύματος λ=0.5 m ταξιδεύει με ταχύτητα c=50m/s. Υπολογίστε την κυκλική συχνότητα ω.
Quiz: Βρείτε τη διαφορά φάσης στα σήματα $V_1 = \sin(30t)\, \textit{και}\, V_2 = \cos(30t)$.

Θυμηθείτε ότι στα κυκλώματα συνεχούς τάσης μια συντεταγμένη, το μέγεθος, είναι αρκετή για να καθορίσει την τάση. Στα ac κυκλώματα όμως είναι εμφανές ότι για την περιγραφή της τάσης χρειάζονται δύο συντεταγμένες: ο χρόνος t και το μέγεθος της τάσης V στο χρόνο t. Για το σκοπό αυτό η περιγραφή των ηλεκτρικών ιδιοτήτων των ac κυκλωμάτων γίνεται με μιγαδικούς αριθμούς.

Σιγουρευτείτε ότι κατέχετε τις βασικές αρχές των <u>μιγαδικών αριθμών</u>, τις γραφικές τους παραστάσεις σε <u>καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες</u> και φυσικά τον τύπο του Euler με τον οποίο για κάθε πραγματικό αριθμό $\theta \in \Re$,

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta$$

Πιο κάτω θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά των βασικών ηλεκτρικών στοιχείων σε διέγερση πηγής ac τάσης, περιγράφοντας το παραγόμενο ρεύμα, τη διαφορά δυναμικού στα άκρα του στοιχείου και την κατανάλωση ισχύος. Η συμπεριφορά αυτή διακρίνεται σε δύο φάσεις: την μεταβατική (transient state) στα αρχικά στάδια της διέγερσης και τη σταθερή (steady state) για τα μεταγενέστερα στάδια. Αν αυτοί οι όροι σας φαίνονται γνωστοί είναι γιατί χρησιμοποιούνται στην ανάλυση διαφορικών εξισώσεων, ακριβώς όπως θα δούμε πιο κάτω μιας και οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν, π.χ. ρεύμα, τάση και ηλεκτρικά στοιχεία συνδέονται με συνήθης διαφορικές εξισώσεις με πραγματικούς σταθερούς συντελεστές.

Quiz: Πως συνδέονται οι δύο φάσεις με τις γενικές (homogeneous) και ειδικές (particular) λύσεις των διαφορικών εξισώσεων;

Ενεργός τάση, ένταση και ισχύς

Όπως έχουμε δει στα ac κυκλώματα η τιμή της τάσης που εφαρμόζεται στα άκρα ενός στοιχείου δεν είναι σταθερή. Όπως είναι φυσικό, τροφοδοτώντας μια ωμική αντίσταση για παράδειγμα με πηγή συνεχούς τάσης V θα καταναλωθεί περισσότερη ενέργεια από αυτή που θα κατανάλωνε η ίδια αντίσταση ενωμένη σε ac πηγή τάσης V για το ίδιο χρονικό διάστημα. Για να εφαρμόσουμε ένα μέτρο σύγκρισης μεταξύ ac και dc (direct current) κυκλωμάτων ορίζουμε ως ενεργό ένταση του εναλλασσόμενου ρεύματος I(t) την σταθερή στο χρόνο τιμή που αντιστοιχεί σε υποτιθέμενο συνεχές ρεύμα το οποίο παράγει την ίδια ενέργεια με το ac ρεύμα στον ίδιο χρόνο. Η τιμή αυτή είναι ίση με τη μέση τετραγωνική τιμή του ρεύματος $I_{rms} = I_0/\sqrt{2}$. *Παρομοίως ορίζουμε και την ενεργό τάση και με τις δυο αυτές ποσότητες την ενεργό ισχύ.*

Είμαστε τώρα έτοιμοι να ορίσουμε μια έννοια γενικότερη από αυτή της ωμικής αντίστασης, η οποία περιγράφει τη 'συμπεριφορά' των ηλεκτρικών στοιχείων στη διέλευση των ηλεκτρικών φορτίων στα ac κυκλώματα. Το πηλίκο της ενεργούς τάσης δια της ενεργού έντασης ορίζεται ως ηλεκτρική εμπέδηση Z [Ω] *(από το ρήμα εμποδίζω) και είναι χαρακτηριστικό του αγωγού <u>σε συνάρτηση με την συχνότητα των σημάτων</u>.*

$$Z = \frac{V_{rms}}{I_{rms}}$$

Συνδεσμολογία: Οι εμπεδήσεις (impedances) συνδέονται σε σειρά καθώς και παράλληλα όπως οι αντιστάσεις. Σε σειρά παίρνουμε το μιγαδικό άθροισμα και παράλληλα το αντίστροφο τους αθροίσματος των admittances Y, όπου $Y = Z^{-1}$.

AC κύκλωμα αντίστασης

Υποθέστε αντίσταση R ενωμένη στους δύο πόλους πηγής τάσης $V_s = V_m e^{j\omega t}$. *Η αντίσταση συμπεριφέρεται όπως και στα κυκλώματα συνεχούς τάσης, αφού αυτή περιγράφεται απλά με ένα πραγματικό αριθμό.*

Από το νόμο του Ohm η ένταση στο κύκλωμα υπολογίζεται ως $I_R = \dfrac{V_s}{R}$. *Η αντίσταση δεν προκαλεί διαφορά φάσης μεταξύ των σημάτων της τάσης και της έντασης, ενώ η τάση στα άκρα της αντίστασης είναι απλά αυτή της πηγής. Οι δύο φάσορες εφάπτονται. Όταν η κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας γίνεται εξ ολοκλήρου σε ωμική αντίσταση τότε η εμπέδηση είναι η ωμική αντίσταση* $Z = R$.

Η έννοια της ηλεκτρικής ισχύς στα ac κυκλώματα είναι ελαφρώς διαφοροποιημένη, αφού πλέον δεν είναι σταθερή με το χρόνο. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε σαν στιγμιαία ισχύ για το χρόνο t το γινόμενο $P(t) = V(t) \cdot I(t)$ *ενώ συνήθως χρησιμοποιείται η μέση ισχύ της αντίστασης δίνεται ως* $P_{ave} = V_{rms} I_{rms} \cdot \cos\phi$, *όπου το συνημίτονο της διαφοράς φάσης λέγεται συντελεστής ισχύος και λαμβάνει τιμές από 0 μέχρι 1.*

Quiz: Σχολιάστε τις ειδικές περιπτώσεις που ο συντελεστής ισχύος είναι μηδέν και ένα.

AC κύκλωμα πυκνωτή

Υποθέστε πυκνωτή χωρητικότητας C ενωμένο με πηγή ac τάσης $V_s = V_m \sin(\omega t)$. *Σε αντίθεση με το κύκλωμα συνεχούς τάσης, ο πυκνωτής δεν ανακόπτει το κύκλωμα (open circuit) όταν αυτός φορτιστεί, αλλά στο κύκλωμα επιτρέπει ροή χρονικά αρμονικού ρεύματος* $I = Z \cdot V_m \sin(\omega t + \pi/2)$.

Συνεπώς η χωρητική αντίσταση $Z = \dfrac{1}{\omega C}$ *καθορίζει το μέτρο του ρεύματος αλλά και τη φάση του η οποία προτρέχει αυτής της εφαρμοζόμενης τάσης κατά T/4 .*

Στον τομέα συχνότητας η εμπέδηση γίνεται μιγαδική και ίση με $Z = \frac{1}{j\omega C}$.

AC κύκλωμα πηνίου

Υποθέστε πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L ενωμένο με πηγή ac τάσης $V_s = V_m \sin(\omega t)$. Σε αντίθεση με το κύκλωμα συνεχούς τάσης, το πηνίο δεν βραχυκυκλώνει το κύκλωμα (short circuit) με την πάροδο του χρόνου, αλλά στο κύκλωμα επιτρέπει ροή χρονικά αρμονικού ρεύματος $I = Z \cdot V_m \sin(\omega t - \pi/2)$. Συνεπώς η επαγωγική αντίσταση $Z = \omega L$ καθορίζει το μέτρο του ρεύματος αλλά και τη φάση του η οποία υστερεί αυτής της εφαρμοζόμενης τάσης κατά T/4 .

Στον τομέα συχνότητας η εμπέδηση γίνεται μιγαδική και ίση με $Z = j\omega L$.

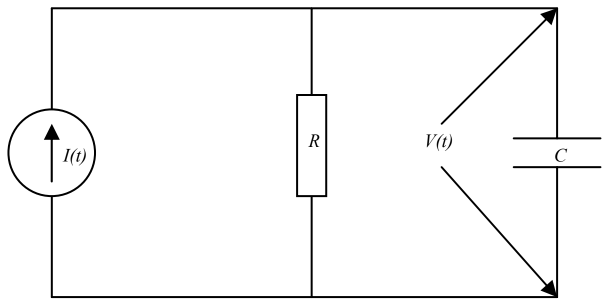
Ερωτήσεις κατανόησης

1) *Αν πηγή τάσης στην οποία συνδέεται πυκνωτής χωρητικότητας 1μF είναι $V(t) = \cos(\omega t)$, δείξετε ότι το ρεύμα που τον διαρρέει είναι $I(t) = -\sin(\omega t)$.*
2) *Υπολογίστε τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημάτων $V_1(t) = 5\sin(2t - \pi/3)$ και $V_2(t) = -10\cos(2t + \pi/5)$.*
3) *Με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων της τάσης και έντασης δείξετε και σχολιάστε τη κυμματομορφή και την κατεύθυνση της ισχύος σε ac κύκλωμα αντίστασης, πυκνωτή και πηνίου.*
4) *Δώστε τις προσκείμενες τιμές της χωρητικής και επαγωγικής εμπέδησης για $\omega \to 0$ και $\omega \to \infty$.*

Η ανάλυση των ac κυκλωμάτων στο χρονικό τομέα (time domain) γίνεται με τη βοήθεια διαφορικών εξισώσεων στις οποίες όλες οι ποσότητες είναι πραγματικές συναρτήσεις. Μετατρέποντας όμως τις παραμέτρους και συναρτήσεις σε μιγαδικές η ανάλυση γίνεται απλούστερη, αλγεβρική. Για παράδειγμα η πηγή $V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ θα αντικατασταθεί με την ισοδύναμη πηγή $V = V_m e^{j(\omega t + \phi)}$ της οποίας θα θεωρούμε ότι το σημαντικό και φυσικό μέρος είναι μόνο το πραγματικό.

Απλό κύκλωμα αντίστασης-πηνίου RC

Πηγή ac έντασης $I_s(t) = I_m e^{j\omega t}$ *συνδέεται παράλληλα με ωμική αντίσταση* R *και πυκνωτή χωρητικότητας C. Ζητείται η τάση V(t) της μορφής* $V(t) = V_m e^{j(\omega t + \phi)}$ *στα άκρα του πυκνωτή. Εφαρμόζοντας τον νόμο έντασης του Kirchhoff στον κόμβο πάνω από την αντίσταση έχουμε* $I_s = I_R + I_C$.



Αντικαθιστώντας $I_R = V(t)/R$ *και* $I_C = C \cdot \dot{V}$ *όπου* $\dot{V} = j\omega V_m e^{j(\omega t + \phi)}$ *η πιο πάνω σχέση ρευμάτων γράφεται ως*[1]

$$\frac{1}{R} V_m e^{j\phi} + j\omega C V_m e^{j\phi} = I_m$$

Λύνοντας ως προς $V_m e^{j\phi}$ *και εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη των μιγαδικών παίρνουμε*

$$V(t) = \frac{R \cdot I_m}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

Όπου η φάση $\phi = \arctan(\omega RC)$.

Η πιο πάνω διαδικασία μπορεί να υπεραπλουστευτεί με τη χρήση του μιγαδικού φάσορα. Υιοθετούμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τους μιγαδικούς φάσορες: Αν $I(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ *τότε ο σχετικός φάσορας είναι* $\mathbf{I}\langle\phi = I_m \exp(j\phi) = I_m e^{j\phi}$. *Σημειώστε ότι ο συμβολισμός αυτός εμπεριέχει τις δύο απαραίτητες συντεταγμένες, μέτρο και γωνία, με τις οποίες μπορεί να οριστεί ο φάσορας σε μιγαδικές συντεταγμένες (complex plane).*

$$I_m e^{j0} = V_m e^{j\phi} \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right)$$

[1] Ο συμβολισμός $\dot{x}$ υποδηλώνει ως συνήθως τη χρονική παράγωγο της μεταβλητής x.

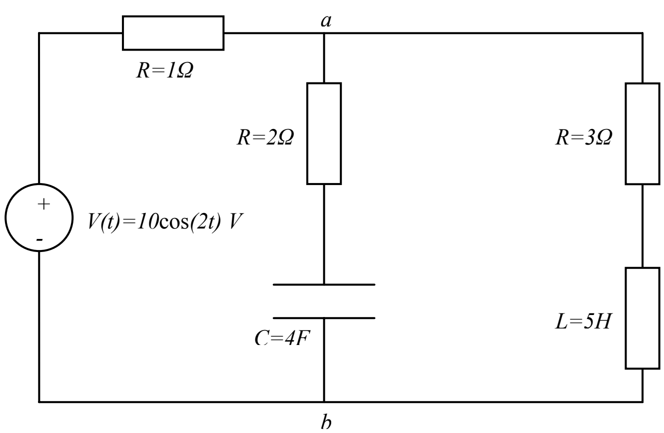
Μεταφέροντας την ποσότητα στην παρένθεση που δεν είναι παρά η μιγαδική αγωγιμότητα του κυκλώματος στα αριστερά της ισότητας και γράφοντας την ως φάσορα παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα με πιο πάνω. Προσέξετε ότι στο τελευταίο παράδειγμα έχουμε μεταφέρει όλες τις ποσότητες στον τομέα της συχνότητας (frequency domain). Για περεταίρω κατανόηση δίνουμε ένα παρόμοιο παράδειγμα από κύκλωμα αντίστασης και πηνίου.

Υποθέστε ac κύκλωμα στο οποίο πηγή τάσης $V = 10\cos(2t)$ *είναι ενωμένη σε σειρά με αντίσταση R = 8Ω και πηνίο με L = 3H. Ζητείται ο φάσορας του ρεύματος.*

Από την κυμματομορφή της τάσης έχουμε ω=2 rad/s και $\mathbf{V} = 10e^{j0}$. *Η μιγαδική εμπέδηση του κυκλώματος είναι* $Z = R + j\omega L = 8 + j6$ *την οποία γράφουμε ως φάσορα* $\mathbf{Z} = 10 \cdot e^{j\arctan(0.75)}$. *Εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm στους φάσορες* $\mathbf{V},\mathbf{I}$ *και* $\mathbf{Z}$ *έχουμε αποτέλεσμα* $\mathbf{I} = 1 \cdot e^{-j0.75}$ *από όπου συμπεραίνουμε ότι* $I(t) = \cos(2t - 0.75)$.

Ερωτήσεις κατανόησης

1) *Μεταφέρετε το κύκλωμα στον τομέα συχνότητας και στη συνέχεια λύστε για τα δύο ρεύματα και τις τάσεις στα a και b.*



2) *Πηγή τάσης* $V(t) = \cos(\omega t)$ *με συχνότητα* $f = (4\pi)^{-1}$ *Hz συνδέεται στα άκρα κυκλώματος συνολικής εμπέδησης* $Z = 10 - j$ *Ω. Αν το ένα από τα δύο στοιχεία της Z είναι*

ωμική αντίσταση 10 Ω βρείτε το είδος και την τιμή του άλλου, και το φάσορα της έντασης.

3) *Για το φάσορα της έντασης* $I = I_m \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ *υπολογίστε και σχεδιάστε τους φάσορες των* $\frac{dI}{dt}$ *και* $\int I\, dt$.

4) *Σε ac κύκλωμα αντίστασης – πηνίου (σε σειρά) η ένταση της πηγής είναι* $I(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ *ενώ η τάση στα άκρα της ολικής εμπέδησης είναι* $V(t) = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$. *Υπολογίστε τις τιμές της αντίστασης, του συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου και το φάσορα της εμπέδησης.*