

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

4η Σειρά Ασκήσεων

Παραδοτέα : 03-Μαρ-2006

Γενικές Οδηγίες:

- Οι ασκήσεις είναι παραδοτέες κατά την έναρξη του μαθήματος την μέρα παραδόσεως τους.
- Καθυστερημένες ασκήσεις δεν θα γίνονται δεκτές για βαθμολόγηση εκτός από εξαιρετικές περιπτώσεις, και πάντα μόνο κατόπιν εκ των προτέρων συνεννόηση με τον διδάσκοντα.
- Η αντιγραφή απαγορεύεται αυστηρά!!!! Σε περίπτωση μη συμμόρφωσης οι ποινές θα είναι αυστηρές..
- Το όνομα και ηλεκτρονική διεύθυνση του υποβάλλοντα φοιτητή πρέπει να αναγράφονται ευκρινώς στη πρώτη σελίδα.

Θεματική Ενότητα: Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Πρόβλημα 1:

Problem 4.21 (p. 346)

Πρόβλημα 2:

Problem 4.48 (p. 352)

Πρόβλημα 3:

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που δίδεται για τη Μέθοδο των Δυνάμεων, προγραμματίστε το MATLAB και μετά επαληθεύσετε τις απαντήσεις του Προβλήματος 2 με χρήση MATLAB. Επισυνάψετε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το λογισμικό (τυπώστε τη σελίδα με τα αποτελέσματα από το MATLAB, με το ονοματεπώνυμο σας τυπωμένο σε αυτή) και στείλετε το *Function* που χρησιμοποιήσατε με ηλεκτρονικό ταχυδρομείο.



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

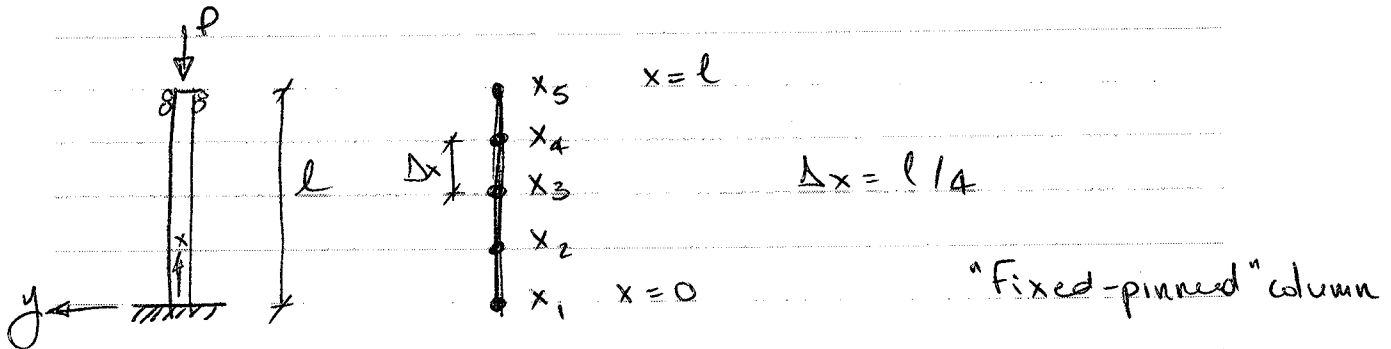
4η Σειρά Ασκήσεων

Πρόβλημα 1:

4.21. A fixed-pinned column carries an axial load P shown in Fig. 4.11(a). Divide the column into four segments shown in Fig. 4.11(b), and derive the eigenvalue problem for finding the buckling or critical load using a finite difference approach. The governing equation for finding the buckling load is given by

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

(See Example 4.4.)



$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

Central Difference Formula:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

και

$$\frac{d^4 y}{dx^4} \approx \frac{(y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2})}{(\Delta x)^4}$$

(από βιβλίο 514)



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

4η Σειρά Ασκήσεων

$l=1:$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{l}\right)^4 \left[y_3 - 4y_2 + 6y_1 - 4y_0 + y_{-1} \right] + \lambda \left(\frac{4}{l}\right)^2 \left[y_2 - 2y_1 + y_0 \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{l}\right)^2 \left\{ y_2 \left[\lambda - \left(\frac{4}{l}\right)^2 (-4) \right] + y_3 \left(\frac{4}{l}\right)^2 \right\} = 0$$

$l=2:$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \lambda \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{l}\right)^4 \left[y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 \right] + \lambda \left(\frac{4}{l}\right)^2 \left[y_3 - 2y_2 + y_1 \right] = 0$$

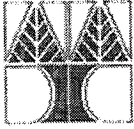
$$\Rightarrow \left(\frac{4}{l}\right)^2 \left\{ y_2 \left[-2 + 6 \left(\frac{4}{l}\right)^2 \right] + y_3 \left[\lambda - 4 \left(\frac{4}{l}\right)^2 \right] + y_4 \left(\frac{4}{l}\right)^2 \right\} = 0$$

$l=3:$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \lambda \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{l}\right)^4 \left[y_5 - 4y_4 + 6y_3 - 4y_2 + y_1 \right] + \lambda \left(\frac{4}{l}\right)^2 \left[y_4 - 2y_3 + y_2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{l}\right)^2 \left\{ y_2 \left[\lambda - 4 \left(\frac{4}{l}\right)^2 \right] + y_3 \left[-2 + 6 \left(\frac{4}{l}\right)^2 \right] + y_4 \left[\lambda - 4 \left(\frac{4}{l}\right)^2 \right] \right\} = 0$$



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

4η Σειρά Ασκήσεων

 $i=4$:

$$\left(\frac{4}{e}\right)^4 \left[y_6 - 4y_5 + 6y_4 - 4y_3 + y_2 \right] + \lambda \left(\frac{4}{e}\right)^2 \left[y_5 - 2y_4 + y_3 \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{e}\right)^2 \left\{ y_2 \left[\left(\frac{4}{e}\right)^2 \right] + y_3 \left[-4\left(\frac{4}{e}\right)^2 + \lambda \right] + y_4 \left[6\left(\frac{4}{e}\right)^2 - 2\lambda \right] \right\} = 0$$

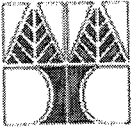
 $i=5$:

$$\left(\frac{4}{e}\right)^5 \left[y_7 - 4y_6 + 6y_5 - 4y_4 + y_3 \right] + \lambda \left(\frac{4}{e}\right)^3 \left[y_6 - 2y_5 + y_4 \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{e}\right)^3 \left\{ y_3 \left[\left(\frac{4}{e}\right)^3 \right] + y_4 \left[-4\left(\frac{4}{e}\right)^3 + \lambda \right] \right\} = 0$$

Σε μορφή μητρώου (κανονικά χείρα του $i=1, 3, 5$)

$$\begin{array}{ccc|c|c} \lambda + 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 & \left(\frac{4}{e}\right)^2 & 0 & y_2 & 0 \\ \lambda - 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 & -2\lambda + 6\left(\frac{4}{e}\right)^2 & \lambda - 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 & y_3 & 0 \\ 0 & \left(\frac{4}{e}\right)^2 & \lambda - 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 & y_4 & 0 \end{array} = 0$$



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

4η Σειρά Ασκήσεων

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} \lambda + 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 - \lambda & \left(\frac{4}{e}\right)^2 & 0 \\ \lambda - 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 & -3\lambda + 6\left(\frac{4}{e}\right)^2 & \lambda + 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 \\ 0 & \left(\frac{4}{e}\right)^2 & \lambda - 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 \left[(-3\lambda + 6\left(\frac{4}{e}\right)^2) \left(\lambda - 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 \right) - \left(\frac{4}{e}\right)^2 \left(\lambda - 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 \right) \right]$$

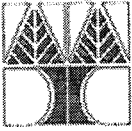
$$- \left(\frac{4}{e}\right)^2 \left[\left(\lambda - 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 \right) \left(\lambda - 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 \right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow 4 \left[\lambda - 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 \right] \left[-3\lambda + 6\left(\frac{4}{e}\right)^2 - \left(\frac{4}{e}\right)^2 \right] - \left[\lambda - 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 \right] \left[\lambda - 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow 4 \left[-3\lambda + 5\left(\frac{4}{e}\right)^2 \right] - \left[\lambda - 4\left(\frac{4}{e}\right)^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow -13\lambda + \left(\frac{4}{e}\right)^2 (24) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{4}{e}\right)^2 \frac{24}{13} = 1.8462 \left(\frac{4}{e}\right)^2$$



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

4η Σειρά Ασκήσεων

Πρόβλημα 2:

4.48. Using the power method with the starting vector $\vec{X} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, find the largest eigenvalue and the corresponding eigenvector of the following matrix:

$$[A] = \begin{bmatrix} 33 & 16 & 72 \\ -24 & -10 & -57 \\ -8 & -4 & -17 \end{bmatrix}$$

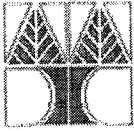
$$\vec{x}^{(k+1)} = A \vec{x}^{(k)}$$

$$\Rightarrow \vec{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 33 & 16 & 72 \\ -24 & -10 & -57 \\ -8 & -4 & -17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max} = \begin{cases} x_1^{(1)} / x_1^{(0)} = 5 / -3 = -1.667 \\ x_2^{(1)} / x_2^{(0)} = -5 / 2 = -2.500 \\ x_3^{(1)} / x_3^{(0)} = -1 / 1 = -1.000 \end{cases}$$

Μη-συνκλιμα \Rightarrow συνεχίστε

$$\vec{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & | & |5| \\ -5 & | & |5| \\ -1 & | & |5| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -1.000 \\ -0.200 \end{bmatrix}$$



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

4η Σειρά Ασκήσεων

$$\tilde{x}^{(2)} = A \tilde{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.600 \\ -2.600 \\ -0.600 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max} = \left. \begin{array}{l} 2.600 / 1.000 = 2.600 \\ -2.600 / -1.000 = 2.600 \\ -0.600 / -0.200 = 3.000 \end{array} \right\} \text{Μικρότερο}$$

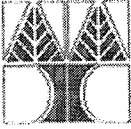
$$\Rightarrow \tilde{x}^{(2)} = \left[\begin{array}{c|c} 2.600 & 2.600 \\ -2.600 & 2.600 \\ -0.600 & 2.600 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -1.000 \\ -0.231 \end{bmatrix}$$

Επόμενο πρόβλημα:

$$\tilde{x}^{(3)} = A \tilde{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.368 \\ -0.833 \\ -0.073 \end{bmatrix}$$

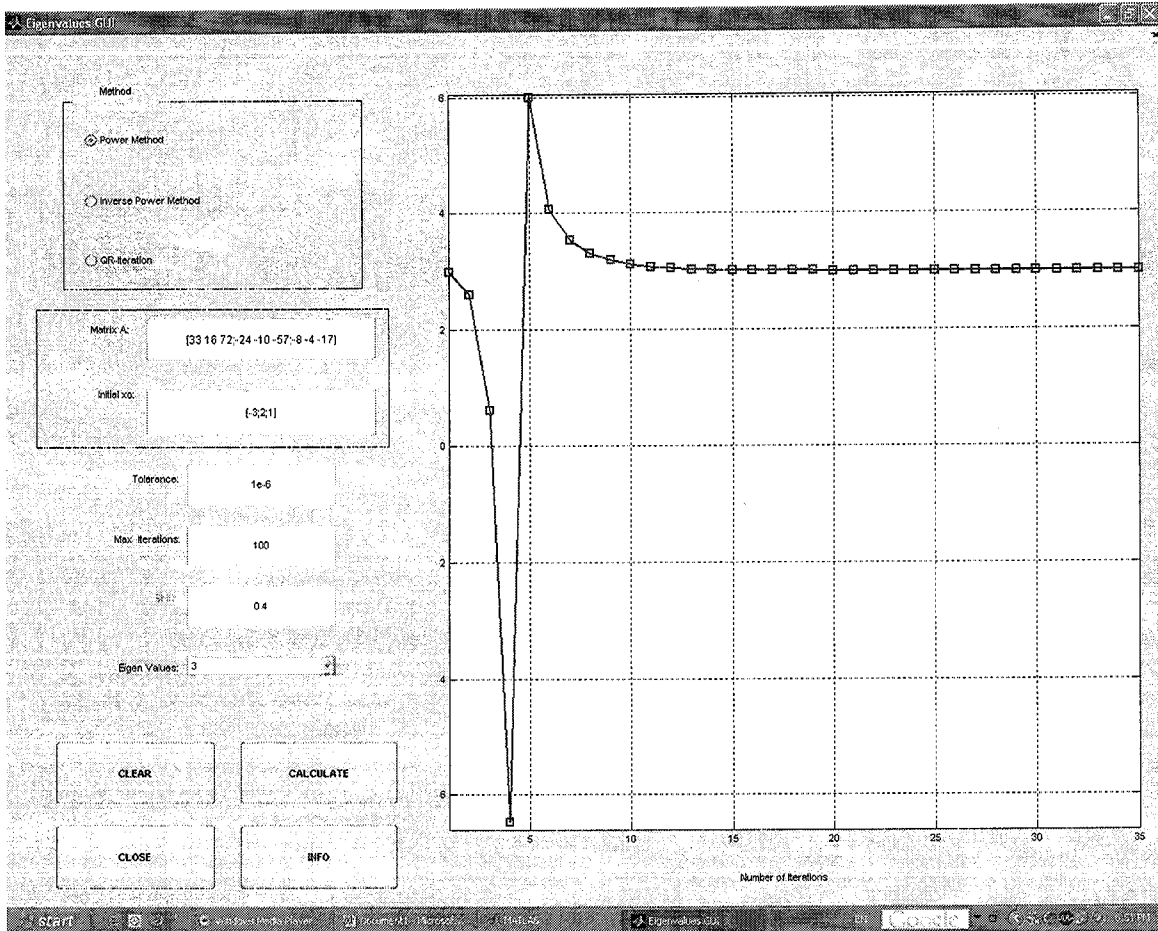
$$\lambda_{\max} = \left. \begin{array}{l} 0.368 / 1.000 = 0.368 \\ -0.833 / -1.000 = 0.833 \\ -0.073 / -0.231 = 0.316 \end{array} \right\}$$

$$\tilde{x}^{(3)} = \left[\begin{array}{c|c} 0.368 & 0.833 \\ -0.833 & 0.833 \\ -0.073 & 0.833 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0.442 \\ -1.000 \\ -0.088 \end{bmatrix}$$



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση
Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
4η Σειρά Ασκήσεων



Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να υπάρξει σύγκλιση.

Η γραφική παράσταση των προεγγισμένων ιδίων πιο πριν, και οι τιμές στο πίνακα της επίλυσης επίλυσε

Τελικό αποτέλεσμα, $\lambda_{\max} \approx 3.001$
σε 20 περίπου βήματα.

με διανύσμα, $x = [-1.000, 0.750, 0.250]^T$

CEE201 Numerical Analysis
 Assignment No.4
 Problem 2

i	$x^{(k)}$			$x^{(k+1)} = A \cdot x^{(k)}$			$x^{(k+1)}/x^{(k)}$		
	-3	2	1	5	-5	-1	-1.667	-2.500	-1.000
0	-3	2	1	5	-5	-1	-1.667	-2.500	-1.000
1	1.000	-1.000	-0.200	2.600	-2.600	-0.600	2.600	2.600	3.000
2	1.000	-1.000	-0.231	0.385	-0.846	-0.077	0.385	0.846	0.333
3	0.455	-1.000	-0.091	-7.545	4.273	1.909	-16.600	-4.273	-21.000
4	-1.000	0.566	0.253	-5.723	3.916	1.434	5.723	6.915	5.667
5	-1.000	0.684	0.251	-4.015	2.878	1.004	4.015	4.206	4.008
6	-1.000	0.717	0.250	-3.521	2.574	0.880	3.521	3.591	3.520
7	-1.000	0.731	0.250	-3.301	2.437	0.825	3.301	3.334	3.300
8	-1.000	0.738	0.250	-3.183	2.365	0.796	3.183	3.202	3.183
9	-1.000	0.743	0.250	-3.116	2.322	0.779	3.116	3.127	3.116
10	-1.000	0.745	0.250	-3.074	2.296	0.769	3.074	3.081	3.074
11	-1.000	0.747	0.250	-3.048	2.280	0.762	3.048	3.053	3.048
12	-1.000	0.748	0.250	-3.032	2.270	0.758	3.032	3.035	3.032
13	-1.000	0.749	0.250	-3.021	2.263	0.755	3.021	3.023	3.021
14	-1.000	0.749	0.250	-3.014	2.259	0.753	3.014	3.015	3.014
15	-1.000	0.749	0.250	-3.009	2.256	0.752	3.009	3.010	3.009
16	-1.000	0.750	0.250	-3.006	2.254	0.752	3.006	3.007	3.006
17	-1.000	0.750	0.250	-3.004	2.253	0.751	3.004	3.004	3.004
18	-1.000	0.750	0.250	-3.003	2.252	0.751	3.003	3.003	3.003
19	-1.000	0.750	0.250	-3.002	2.251	0.750	3.002	3.002	3.002
20	-1.000	0.750	0.250	-3.001	2.251	0.750	3.001	3.001	3.001
21	-1.000	0.750	0.250	-3.001	2.251	0.750	3.001	3.001	3.001
22	-1.000	0.750	0.250	-3.001	2.250	0.750	3.001	3.001	3.001

$$A = \begin{pmatrix} 33 & 16 & 72 \\ -24 & -10 & -57 \\ -8 & -4 & -17 \end{pmatrix}$$

} *biyeğin*
 $J_{max} \approx 3.001$

MATLAB FUNCTION

function PowerMethod = myfunction (M,z,n)

```
max = 20;
tol = 0.005;
for i=1:1:max
    w = M*z;
    k = 1;
    b = abs(w(k));
    for j=2:1:n
        if abs(w(j))>=b
            k = j;
            b = abs(w(j));
        end
    end
    m = w(k);
    z = w/w(k);
    if norm(M*z - m*z)<tol, break
end
end
m
z
return
```

M: ο πίνακας των ορίων
ή ιδιοτιμή αναγνώριση

z: το αρχικό διάνυσμα
προβέβλητος

n: η διαστάση του
πίνακα / διαστάσεων

MATLAB SESSION

```
>> M=[33 16 72;-24 -10 -57;-8 -4 -17]
```

```
M =
    33    16    72
   -24   -10   -57
    -8    -4   -17
```

— Ο πίνακας ενδιαφέροντος

```
>> z=[-3;2;1]
```

```
z =
   -3
     2
     1
```

— Το αρχικό διάνυσμα

```
>> myfunction(M,z,3)
```

```
m =
    3.0092
```

— Η τιμή των ιδιοτιμών

```
z =
    1.0000
   -0.7496
   -0.2500
```

— Το ιδιοδιάνυσμα