

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

5η Σειρά Ασκήσεων

Παραδοτέα : 14-Μαρ-2006

Γενικές Οδηγίες:

- Οι ασκήσεις είναι παραδοτέες κατά την έναρξη του μαθήματος την μέρα παραδόσεως τους.
- Καθυστερημένες ασκήσεις δεν θα γίνονται δεκτές για βαθμολόγηση εκτός από εξαιρετικές περιπτώσεις, και πάντα μόνο κατόπιν εκ των προτέρων συνεννόηση με τον διδάσκοντα.
- Η αντιγραφή απαγορεύεται αυστηρά!!!! Σε περίπτωση μη συμμόρφωσης οι ποινές θα είναι αυστηρές..
- Το όνομα και ηλεκτρονική διεύθυνση του υποβάλλοντα φοιτητή πρέπει να αναγράφονται ευκρινώς στη πρώτη σελίδα.

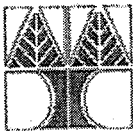
Θεματική Ενότητα: Επίλυση Μη-Γραμμικών Εξισώσεων

Προβλήματα:

1. Problem 2.26 (p. 128)
2. Problem 2.29 (p. 128)
3. Problem 2.35 (p. 129)
4. Problem 2.38 (p. 129)
5. Problem 2.41 (p. 130)

6. Problem 2.79 (p. 134)

Σημείωση: Χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο που δίδεται και το MATLAB. Επισυνάψετε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το λογισμικό (τυπώστε τη σελίδα με τα αποτελέσματα από το MATLAB, με το ονοματεπώνυμο σας τυπωμένο σε αυτή) και στείλετε το *Function* που χρησιμοποιήσατε με ηλεκτρονικό ταχυδρομείο.



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

5η Σειρά Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 (Άσκηση 2.26, σελ. 128)

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 0.04} + 0.24 \sin^{-1}\left(\frac{0.1}{x}\right) - 10.055752 = 0$$

Bisection Method: $x^* \in [2, 10]$ $\epsilon = 0.001$

(α) $m = \frac{2+10}{2} = 6.000$

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = f(2) = -6.049 \\ f(m) = f(6) = 1.947 \\ f(b) = f(10) = 9.946 \end{array} \right\} \text{ όριο ρίζας } [2, 6]$$

(β) $m = \frac{2+6}{2} = 4$

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = f(2) = -6.049 \\ f(m) = f(4) = -2.052 \\ f(b) = f(6) = 9.946 \end{array} \right\} \text{ όριο ρίζας } [4, 6]$$

#	a	b	m	f(a)	f(m)	f(b)
1.	2	10	6	-6.049	1.947	9.946
2.	2	6	4	-6.049	-2.052	1.947
3.	4	6	5	-2.052	-0.053	1.947
4.	5	6	5.500	-0.053	0.947	1.947
5.	5	5.500	5.250	-0.053	0.447	0.947
6.	5	5.250	5.125	-0.053	0.197	0.447
7.	5	5.125	5.062	-0.053	0.072	0.197



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

5η Σειρά Ασκήσεων

Βήμα	a	b	m	$f(a)$	$f(m)$	$f(b)$
8.	5	5.062	5.031	-0.053	0.009	0.071
9.	5	5.031	5.016	-0.053	-0.022	0.009
10.	5.016	5.031	5.024	-0.021	-0.005	0.009
11.	5.024	5.031	5.028	-0.005	0.003	0.009
12.	5.024	5.028	5.026	-0.005	-0.001	0.003
13.	5.026	5.028	5.027	-0.001	0.001	0.003
14.	5.026	5.027	5.027	-0.001	0.001	0.001
15.	5.026	5.027	5.027			

6 σύγκριση

$$\Rightarrow x^* \approx 5.027$$

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση
Εαρινό Εξάμηνο 2006ΛΥΣΕΙΣ
5η Σειρά Ασκήσεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2 (Άσκηση 2.29, σελ. 128)

$$f(x) = x^3 - 0.2589x^2 + 0.02262x - 0.001122 = 0$$

$$\text{Newton-Raphson, } x_1 = 0.0 \quad \epsilon = 0.001$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Για εφαρμογή της μεθόδου χρειαζόμαστε τη πρώτη παράγωγο της αρχικής συνάρτησης.

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 0.5178x + 0.02262$$

Βήμα 1:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.0 - \frac{f(0.0)}{f'(0.0)} = 0.0 - \frac{-0.001}{0.023} = 0.050$$

Βήμα 2:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.050 - \frac{f(0.050)}{f'(0.050)} = 0.171 \quad \text{κ.λ.π.}$$

<u>Βήμα, i</u>	<u>x_i</u>	<u>$f(x_i)$</u>	<u>$f'(x_i)$</u>	<u>x_{i+1}</u>
1.	0.0	-0.001	0.023	0.050
2.	0.050	-0.001	0.004	0.171
3.	0.171	0.000	0.022	0.163
4.	0.163	0.000	0.018	0.162
5.	0.162	0.000	0.017	0.162

} Σύγκλιση

$$\Rightarrow x^* \approx 0.162$$



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

5η Σειρά Ασκήσεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3 (Α6κβ6η 2.35, 6ε). 129)

$$P = \frac{A}{y_n} - y_n \cot(\theta) + \frac{2y_n}{\sin(\theta)}$$

$$P = 3\text{m}, \quad A = 1\text{m}^2, \quad y_n = 0.5\text{m}$$

$$\theta \in [10^\circ, 60^\circ], \quad \epsilon = 0.001$$

$$\Rightarrow \cancel{3} = \frac{1}{0.5} - 0.5 \cot(\theta) + \frac{2(0.5)}{\sin(\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin(\theta)} - \frac{1}{2} \cot(\theta) + 2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin(\theta)} - \frac{1}{2} \cot(\theta) - 1 = 0$$

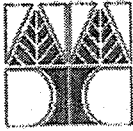
Secant Method:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \left[\frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \right] \quad i=2,3,4$$

Βήμα	x_i	$f(x_i)$	x_{i+1}
1.	$10^\circ = 0.3491$	0.550	
2.	$60^\circ = 2.0944$	0.443	9.357
3.	9.357	21.032	1.938
4.	1.938	0.264	1.844
5.	1.844	0.178	1.647
6.	1.647	0.041	1.588
7.	1.588	0.009	1.572
8.	1.572	0.001	1.571
9.	1.571	0.000	1.571

$\Rightarrow x^* \approx 1.571$

1.571
1.571

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση
Εαρινό Εξάμηνο 2006ΛΥΣΕΙΣ
5η Σειρά Ασκήσεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4 (Άσκηση 2.38, 6εγ. 129)

$$f(x) = \ln x$$

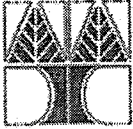
$$x_1 = 0.6$$

$$x_2 = 6.0$$

(a) Secant Method.

Βήμα	x_i	$f(x_i)$	x_{i+1}
1.	0.6	-0.511	
2.	6.0	1.792	1.798
3.	1.798	0.587	-0.248
4.	-0.248	Δεν ορίζεται	

Η διαδικασία σταματά στο 4^ο βήμα, γιατί η συνάρτηση $\ln(x_i)$ δεν ορίζεται στο εύρος που υπολογίστηκε με το προηγούμενο βήμα.



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

5η Σειρά Ασκήσεων

(β) Μέθοδος Regula Falsi

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Με έλεγχο προσήμων, όπως, τούτη τη φορά!

$$\text{Αν } f(x_{i-1})f(x_i) > 0 \Rightarrow x_i \rightarrow x_{i+1}$$

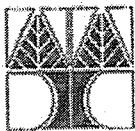
$$\text{ή } f(x_{i+1})f(x_{i-1}) > 0 \Rightarrow x_{i-1} \rightarrow x_{i+1}$$

Βήμα	x_i	$f(x_i)$	x_{i+1}	Έλεγχος, Όριο λύσης
1.	0.6	-0.511		
2.	6.0	1.792	1.798	
3.	1.798	0.587	1.158	[0.6, 1.798]
4.	1.158	0.146	1.033	[0.6, 1.158]
5.	1.033	0.033	1.007	[0.6, 1.033]
6.	1.007	0.007	1.002	[0.6, 1.007]
7.	1.002	0.002	1.000	[0.6, 1.002]
8.	1.000	0.000	1.000	

δύο ψηφία

$$\Rightarrow x^* \approx 1.000$$

Η μέθοδος καταλήγει σε λύση διότι ο έλεγχος του ορίου (προσήμων) σε κάθε βήμα αναστρέφει απόχρημα (όπως γίνεται με τη μέθοδο Secant).



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

5η Σειρά Ασκήσεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5 (Άσκηση 2.41, σελ. 130)

$$S = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

S: future sum
R: uniform payments
n: number of payments
i: interest rate

Οι πράξεις γίνονται με βάση
επίγεια λογικά.

$\Rightarrow n = 10$ χρόνια

R = 1200 επίγιο λογό

$$\Rightarrow 20000 = 1200 \left[\frac{(1+i)^{10} - 1}{i} \right]$$

Fixed-Point Iteration

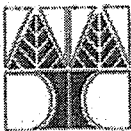
Η αρχική επίγωση πρέπει να ~~α~~ γραφτεί ως επίγωση
μορφής $x = g(x)$

(α)

$$\Rightarrow i = \frac{1200}{20000} \left[(1+i)^{10} - 1 \right] = \frac{3}{50} \underbrace{\left[(1+i)^{10} - 1 \right]}_{g(i)}$$

Βήμα	i	$g(i)$
1.	0.05	0.038
2.	0.038	0.027
3.	0.027	0.018
4.	0.018	0.012
5.	0.012	0.008
6.	0.008	0.005
7.	0.005	0.003
8.	0.003	0.002
9.	0.002	0.001

Η επίγωση αποκρίνεται



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

5η Σειρά Ασκήσεων

(β) Δοκιμάζουμε διαφορετική αραγραφή ως αρχικές
εξισώσεις.

$$i = \frac{3}{50} \left[(1+i)^{10} - 1 \right] \Rightarrow \frac{50}{3} i = (1+i)^{10} - 1$$

$$\Rightarrow (1+i)^{10} = 1 + i(50/3)$$

$$\Rightarrow (1+i) = \frac{1 + i(50/3)}{(1+i)^9}$$

$$\Rightarrow i = \underbrace{\left[\frac{1 + i(50/3)}{(1+i)^9} \right]}_{g_2(x)} - 1$$

Βήμα:

	i	$g_2(x)$
1.	0.05	0.182
2.	0.182	-0.104
3.	-0.104	-2.953
4.	-2.953	-0.884
5.	-0.884	-3.5×10^9

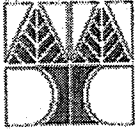
Δηλ υπάρχει
δύσχεσμα

(γ) Δοκιμάζουμε διαφορετική αραγραφή ως αρχικές
εξισώσεις.

$$i = \frac{3}{50} \left[(1+i)^{10} - 1 \right]$$

$$\Rightarrow 2i = \frac{3}{50} \left[(1+i)^{10} - 1 \right] + i$$

$$\Rightarrow i = \underbrace{2i - \frac{3}{50} \left[(1+i)^{10} - 1 \right]}_{g_3(x)}$$



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

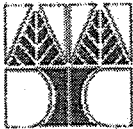
Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

5η Σειρά Ασκήσεων

<u>Βήφα</u>	<u>i</u>	<u>$g_i(x)$</u>	
1.	0.05	0.062	
2.	0.062	0.075	
3.	0.075	0.086	
4.	0.086	0.095	
5.	0.095	0.101	
6.	0.101	0.105	
7.	0.105	0.107	
8.	0.107	0.108	
9.	0.108	0.109	} σύγκριση
10.	0.109	0.109	
11.	0.109	0.109	

$$\Rightarrow x^* \approx 0.109 \approx 10.9\%$$



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

5η Σειρά Ασκήσεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6 (Άσκηση 2.79, βελ. 134)

Μέθοδος Regula-Falsi για επίλυση της εξίσωσης

$$f(x) = \frac{1.5x}{(1+x^2)^2} - 0.65 \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{0.65x}{1+x^2} = 0$$

για $x_1 = 0.0$

$x_2 = 1.0$

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \left[\frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \right]$$

με έλεγχο ορίου λύσεως:

αν $f(x_{i+1})f(x_i) > 0 \Rightarrow x_i \rightarrow x_{i+1}$

αν $f(x_{i+1})f(x_{i-1}) > 0 \Rightarrow x_{i-1} \rightarrow x_{i+1}$

Αποφίνως:

Βήμα	x_i	$f(x_i)$	Όριο λύσεως	x_{i+1}
1.	0.000	-1.021		
2.	1.000	0.189	0.000 - 1.000	0.844
3.	0.844	0.187	0.000 - 0.844	0.713
4.	0.713	0.159	0.000 - 0.713	0.617
5.	0.617	0.114	0.000 - 0.617	0.555
6.	0.555	0.071	0.000 - 0.555	0.519
7.	0.519	0.039	0.000 - 0.519	0.500



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

5η Σειρά Ασκήσεων

Βήμα	x_i	$f(x_i)$	Δ_{i-1}	x_{i+1}
8.	0.500	0.020	[0.000, 0.500]	0.490
9.	0.490	0.010	[0.000, 0.500]	0.495
10.	0.495	0.015	[0.000, 0.495]	0.488
11.	0.488	0.008	[0.000, 0.488]	0.484
12.	0.484	0.003	[0.000, 0.484]	0.483
13.	0.483	0.002	[0.000, 0.483]	0.482
14.	0.482	0.001	[0.000, 0.482]	0.482
15.	0.482	0.001	[0.000, 0.482]	0.482

$\Rightarrow x^* \approx 0.482$

σύνθημα