Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

6η Σειρά Ασκήσεων

(α) $S_x \equiv \sum_{i=1}^{6} x = 0{,}0 + 0{,}4 + 0{,}8 + 1{,}2 + 1{,}6 + 2{,}0 = 6{,}0$

$S_{xx} = \sum_{i=1}^{6}(x^2) = (0{,}0)^2 + (0{,}4)^2 + \cdots + (2{,}0)^2 = 8{,}80$

$S_{xy} = \sum_{i=1}^{6}(xy) = (0{,}0)(0{,}21) + (0{,}4)(1{,}25) + (0{,}8)(2{,}31) + \cdots = 16{,}23$

$S_{yy} = \sum_{i=1}^{6}(y^2) = (0{,}21)^2 + (1{,}25)^2 + (2{,}31)^2 + \cdots = 31{,}49$

Για να προσδιορίσουμε την ζητούμενη ευθεία με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων έχουμε,

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x$$

όπου $a_0 = \dfrac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{n S_{xx} - (S_x)^2}$

$$a_1 = \frac{n S_{xy} - S_x S_y}{n S_{xx} - (S_x)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = \dfrac{(12{,}32)(8{,}80) - (6{,}0)(16{,}23)}{6 \times (8{,}80) - (6{,}0)^2} = 0{,}657 \\[2ex] a_1 = \dfrac{6(16{,}23) - (6{,}0)(12{,}32)}{6(8{,}80) - (6{,}0)^2} = 1{,}396 \end{cases}$$

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

6η Σειρά Ασκήσεων

Επομένως, $f_1(x) \approx 0,657 + 1,396x$

Σφάλμα Παρεμβολής

$E_x =$ ~~βέλτιστο~~ $y - f_1(x)$

(Οι ~~[illegible]~~ υπολογισμοί φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα).

Οι τιμές που προκύπτουν από τη μέθοδο

το σφάλμα σε κάθε σημείο

x	y
0.0	0.21
0.4	1.25
0.8	2.31
1.2	2.70
1.6	2.65
2.0	3.20
$\bar{y}$	2.05

	Sx	Sy	Sxx	Sxy
	0.00	0.21	0.00	0.00
	0.40	1.25	0.16	0.50
	0.80	2.31	0.64	1.85
	1.20	2.70	1.44	3.24
	1.60	2.65	2.56	4.24
	2.00	3.20	4.00	6.40
Σ	6.00	12.32	8.80	16.23

$\hat{y}$	$(y - \hat{y})$	$(y-\hat{y})^2$
0.66	-0.45	0.20
1.22	0.03	0.00
1.77	0.54	0.29
2.33	0.37	0.14
2.89	-0.24	0.06
3.45	-0.25	0.06
		0.75

$\sum(E_x)^2$

$a_0 = [Sy*Sxx - SxSxy]/[nSxx - (Sx)^2]$	0.657
$a_1 = [nSxy - SxSy]/[nSxx - (Sx)^2]$	1.396

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

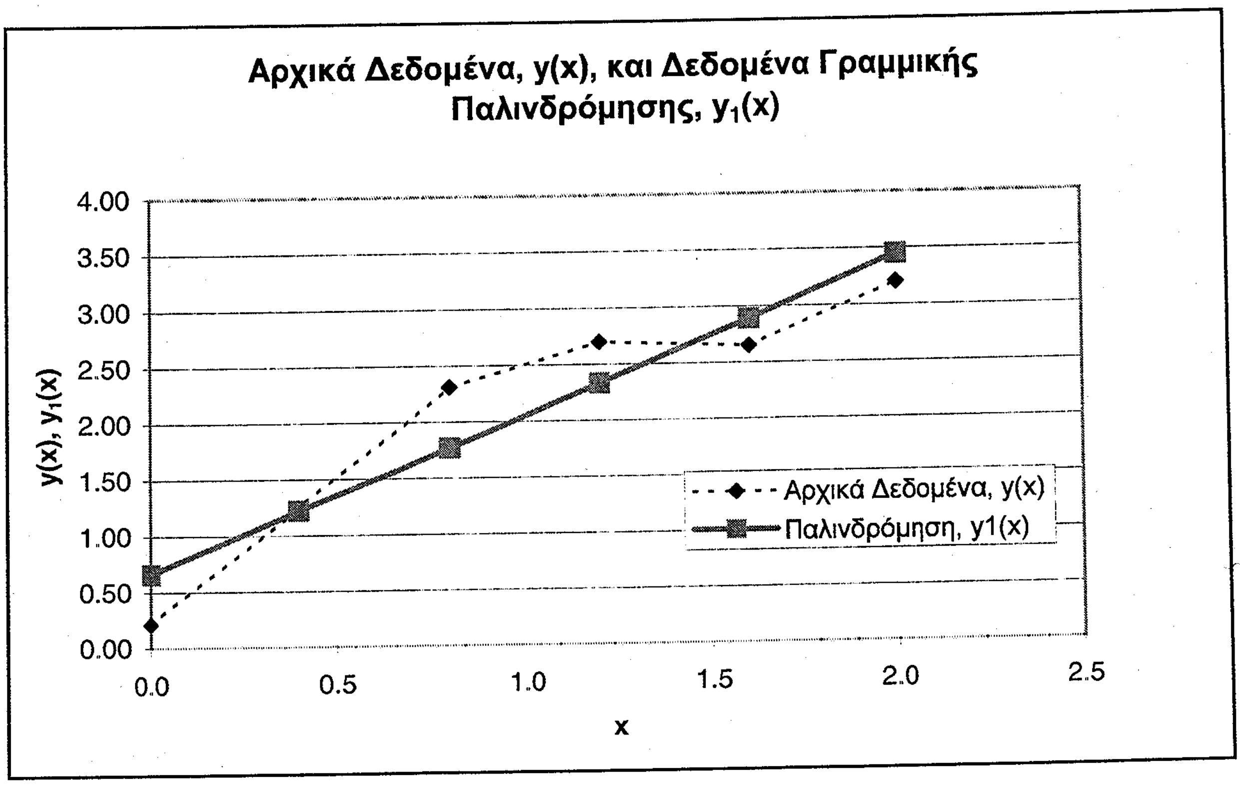
Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
6η Σειρά Ασκήσεων

Επομένως,

x	0,0	0,40	0,8	1,2	1,6	2,0
$y(x)$	0,21	1,25	2,31	2,70	2,65	3,20
$\hat{y}_1(x)$	0,66	1,22	1,77	2,33	2,89	3,45

linear regression



Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
6η Σειρά Ασκήσεων

Παραβολική παρεμβολή:

$$\begin{cases} n a_0 + S_x a_1 + S_{xx} a_2 = S_y \\ S_x a_0 + S_{xx} a_1 + S_{xxx} a_2 = S_{xy} \\ S_{xx} a_0 + S_{xxx} a_1 + S_{xxxx} a_2 = S_{xxy} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 a_0 + 6{,}00 a_1 + 8{,}80 a_2 = 12{,}32 \\ 6{,}00 a_0 + 8{,}80 a_1 + 14{,}40 a_2 = 16{,}23 \\ 8{,}80 a_0 + 14{,}40 a_1 + 25{,}06 a_2 = 25{,}15 \end{cases}$$

Με χρήση MATLAB

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0{,}2433 \sim 0{,}243 \\ a_1 = 2{,}9475 \sim 2{,}948 \\ a_2 = -0{,}7755 \sim -0{,}776 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(x) = 0{,}243 + 2{,}948 x - 0{,}776 x^2$$

x	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
$y(x)$	0,21	1,25	2,31	2,70	2,65	3,20
$\hat{y}_2(x)$	0,24	1,30	2,10	2,66	2,97	3,04

Παραβολή ελαχίστων τετραγώνων

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

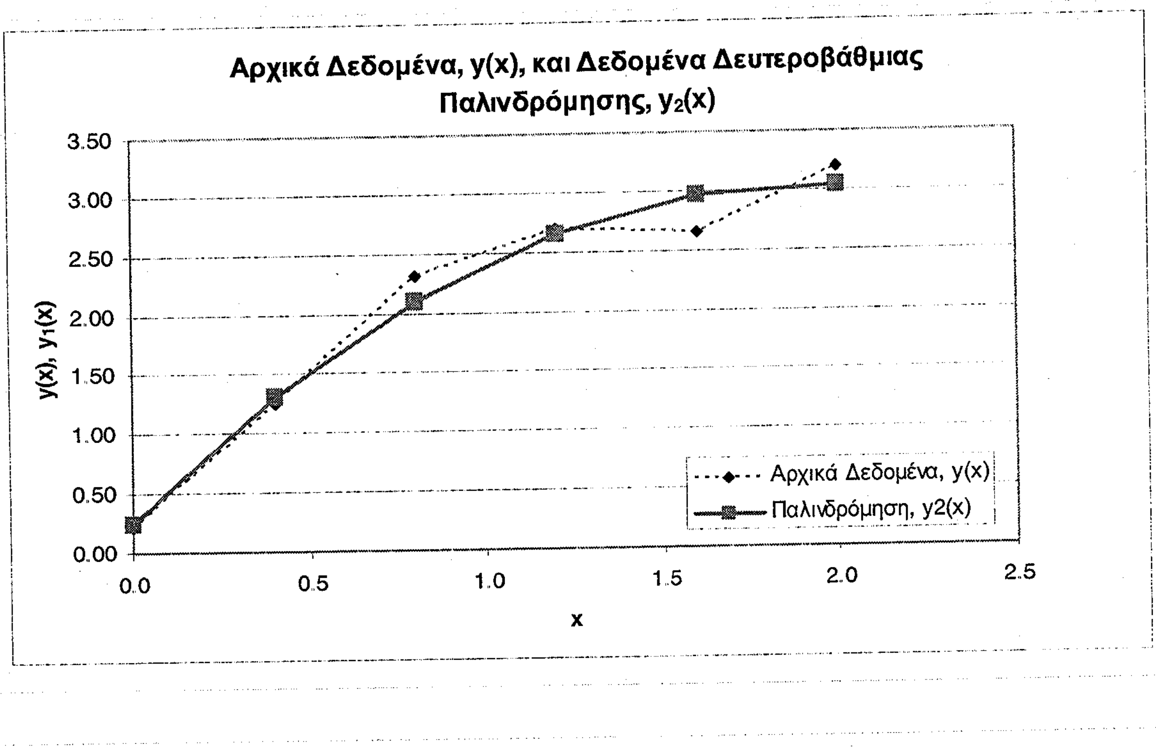
ΛΥΣΕΙΣ
6η Σειρά Ασκήσεων

x	y
0.0	0.21
0.4	1.25
0.8	2.31
1.2	2.70
1.6	2.65
2.0	3.20
$\bar{y}$	2.05

	Sx	Sy	Sxx	Sxy	Sxxx	Sxxxx	Sxxy
	0.00	0.21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.40	1.25	0.16	0.50	0.06	0.03	0.20
	0.80	2.31	0.64	1.85	0.51	0.41	1.48
	1.20	2.70	1.44	3.24	1.73	2.07	3.89
	1.60	2.65	2.56	4.24	4.10	6.55	6.78
	2.00	3.20	4.00	6.40	8.00	16.00	12.80
π	6.00	12.32	8.80	16.23	14.40	25.06	25.15

$\hat{y}$	$(y-\hat{y})$	$(y-\hat{y})^2$
0.24	-0.03	0.00
1.30	-0.05	0.00
2.10	0.21	0.04
2.66	0.04	0.00
2.97	-0.32	0.10
3.04	0.16	0.03
		0.17

$n.a_0$ + Sx.a1 + Sxx.a2 = Sy	Με MATLAB	a0 =	0.243
Sx.a0 + Sxx.a1 + Sxxx.a2 = Sxy		a1 =	2.948
sxx.a0 + Sxxx.a1 + Sxxxx.a2 = Sxxy		a2 =	-0.776



(1β)

REGRESSION ANALYSIS USING MS-EXCEL

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	0.938091244
R Square	0.880015181
Adjusted R Square	0.850018977
Standard Error	0.431184967
Observations	6

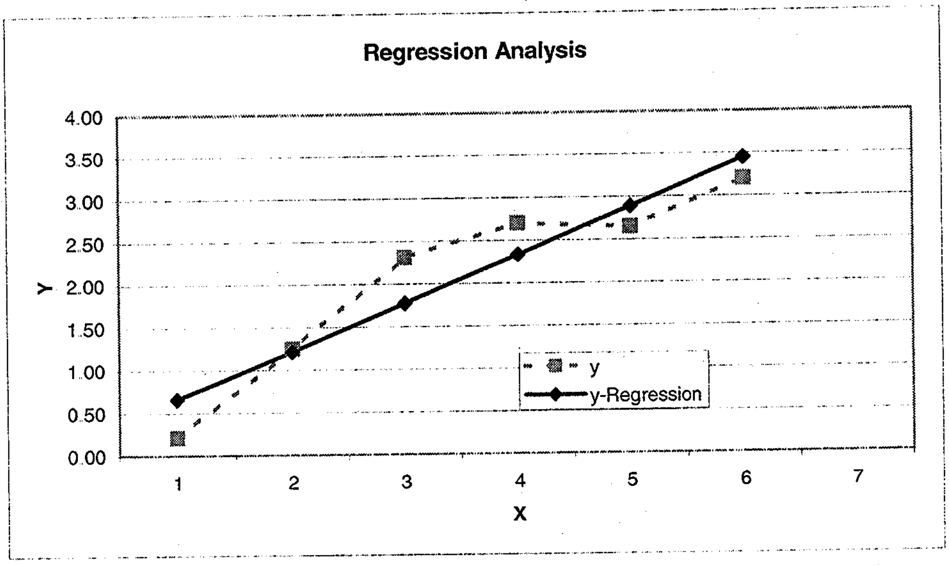
ANOVA

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*
Regression	1	5.454451429	5.454451429	29.33755087	0.005630403
Residual	4	0.743681905	0.185920476		
Total	5	6.198133333			

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*	*Lower 95.0%*	*Upper 95.0%*
Intercept	0.657619048	0.312068768	2.107288888	0.102804285	-0.208822756	1.524060852	-0.208822756	1.524060852
X Variable 1	1.395714286	0.257682305	5.416414947	0.005630403	0.680273513	2.111155059	0.680273513	2.111155059

ORIGINAL DATA	
x	**y**
0.0	0.21
0.4	1.25
0.8	2.31
1.2	2.70
1.6	2.65
2.0	3.20

Regression	
x	**y**
0.0	0.7
0.4	1.2
0.8	1.8
1.2	2.3
1.6	2.9
2.0	3.4



Σεχ. 7 απο 25

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
6η Σειρά Ασκήσεων

(1γ) ~~Excel~~ Αναλυτική Εξίσωση: $y_a(x) = 0,657 + 1,396x$

MS-Excel : $y_e(x) = 0,657619048 + 1,395714286x$

x_k	0,2	0,5	1,0	1,5	2,5
$y_a(x)$	0,94	1,36	2,05	2,75	4,15
$y_e(x)$	0,94	1,36	2,05	2,75	4,15

Δίνουν τα ίδια αποτελέσματα.

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
6η Σειρά Ασκήσεων

Πρόβλημα 2:

Με βάση τα ίδια δεδομένα όπως στο Πρόβλημα 1, χρησιμοποιείστε το λογισμικό MATLAB

(α) για να αναλύσετε τα δεδομένα τούτα και να δημιουργήσετε τη γραμμική παρεμβολή. Να γίνει η γραφική παράσταση των αρχικών σημείων και των σημείων παρεμβολής.

(β) για να αναλύσετε τα δεδομένα τούτα και να δημιουργήσετε τη δευτεροβάθμια παρεμβολή. Να γίνει η γραφική παράσταση των αρχικών σημείων και των σημείων παρεμβολής.

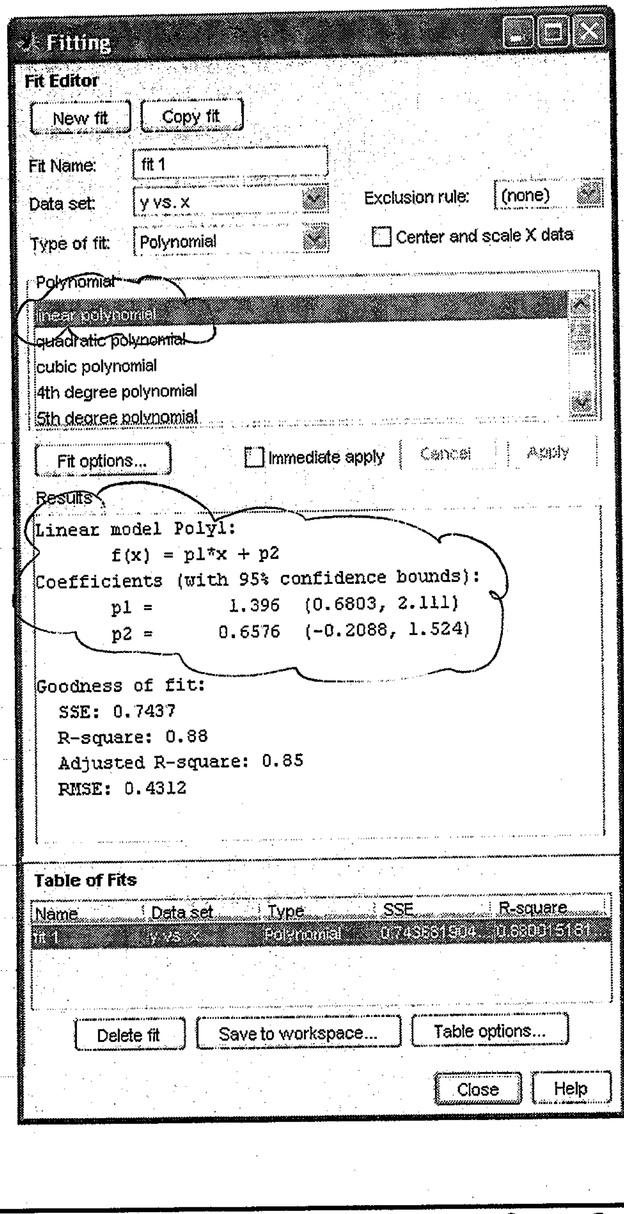
(α) Αφού ορίσουμε οι πίνακες x & y στο MATLAB, γίνεται λήψη του "Curve Fitting" toolbox.

Τα αποτελέσματα για γραμμική παλινδρόμηση φαίνονται δίπλα.

Η εξίσωση που προκύπτει

$y = 1{,}396x + 0{,}6576$

φαίνεται γραφικά στην επόμενη σελίδα.



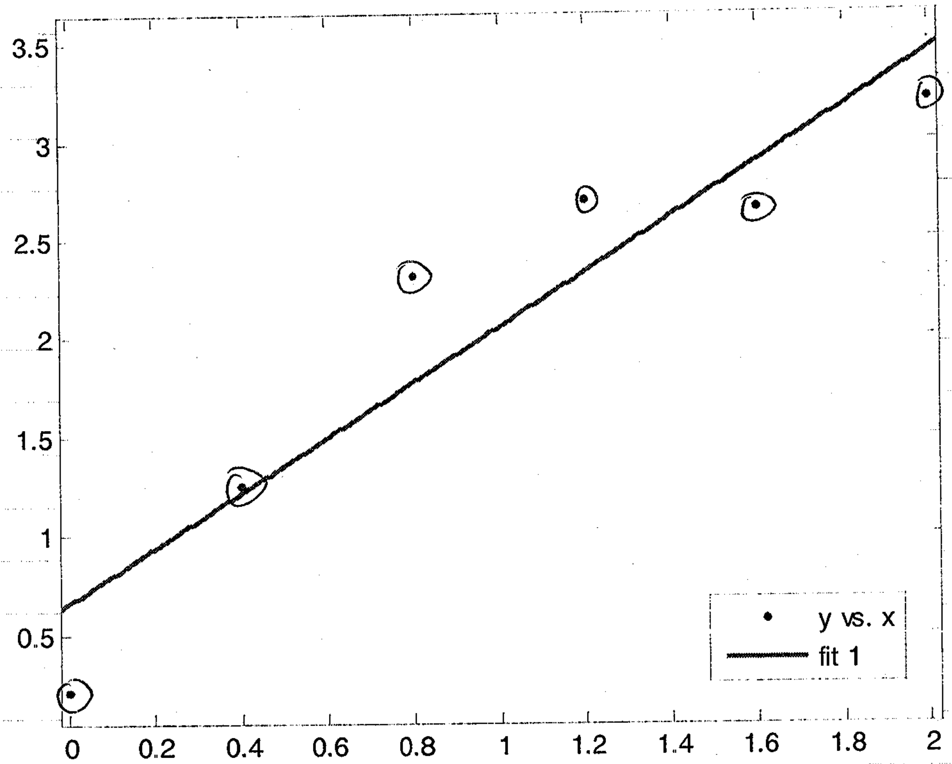
Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
6η Σειρά Ασκήσεων



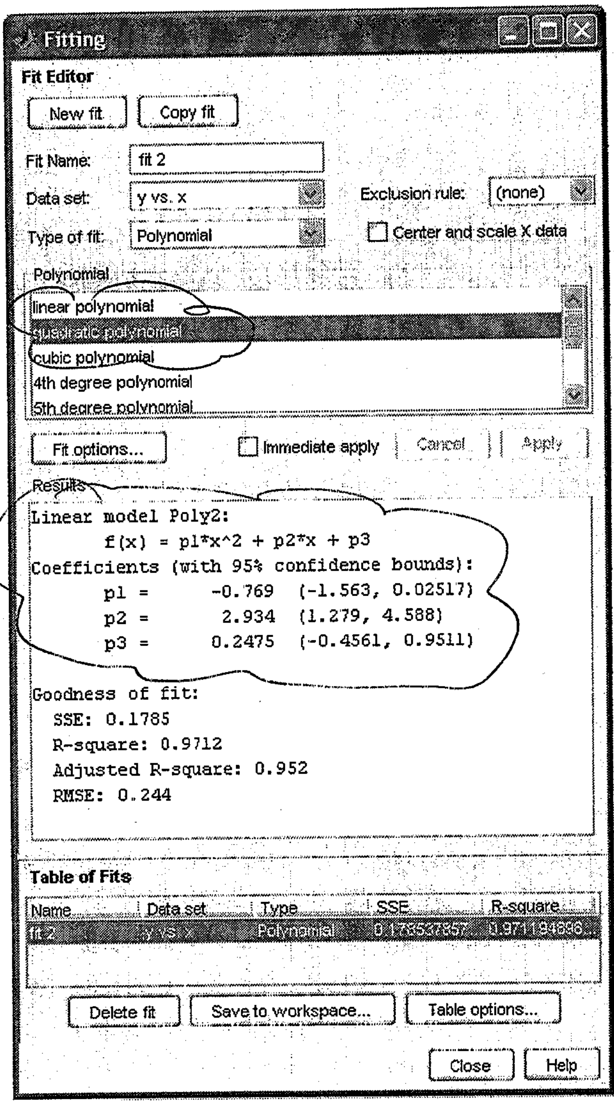
ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

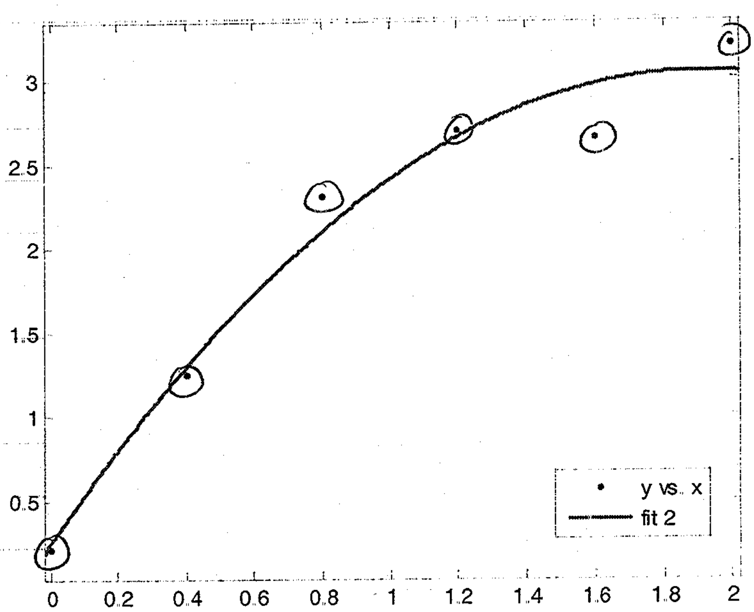
Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
6η Σειρά Ασκήσεων

(β) Δευτεροβάθμια παρεμβολή

$$y_2(x) = -0,769x^2 + 2,934x + 0,2475$$





Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 200[illegible]

ΛΥΣΕΙΣ
6η Σειρά Ασκήσεων

<u>Πρόβλημα 3:</u>

Με βάση τα ίδια δεδομένα όπως στο Πρόβλημα 1,

(α) χρησιμοποιείστε την Μέθοδο Διηρημένων Διαφορών για να αναπτύξετε το πολυώνυμο παρεμβολής..

(β) Να υπολογισθούν οι τιμές y_k για τα τις πιο κάτω τιμές x_k και να γίνει η γραφική παράσταση όλων των σημείων.

x_k	0,2	0,5	1,0	1,5	2,5	
y_k						

x	y	y_1	y_2
0,0	$\boxed{0,21}$		
		$\frac{1,25-0,21}{0,4-0,0}=\boxed{2,60}$	
0,4	1,25		$\frac{2,65-2,60}{0,8-0,0}=\boxed{+0,06}$
		$\frac{2,31-1,25}{0,8-0,4}=2,65$	
0,8	2,31		$\frac{0,98-2,65}{1,2-0,4}=-2,09$
		$\frac{2,70-2,31}{1,20-0,8}=0,98$	
1,2	2,70		$\frac{-0,12-0,98}{1,6-0,8}=-1,38$
		$\frac{2,65-2,70}{1,6-1,2}=-0,12$	
1,6	2,65		$\frac{1,38+0,12}{2,0-1,2}=1,88$
		$\frac{3,20-2,65}{2,0-1,6}=1,38$	
2,0	3,20		

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

6η Σειρά Ασκήσεων

Απο προηγούμενη σελίδα

x	y				
0,0	0,21				
0,4	1,25	+0,06			
0,8	2,31	−2,09	$\frac{-2,09-0,06}{1,2-0,0} = \boxed{-1,79}$	$\boxed{1,49}$	$\boxed{-0,08}$
1,2	2,70	−1,38	$\frac{-1,38+2,09}{1,6-0,4} = 0,59$	1,33	
1,6	2,65	1,88	$\frac{1,88+1,38}{2,0-0,8} = 2,72$		
2,0	3,20				

~~Η παρεμβολή ...~~

$\cancel{N(x) = 0,21 + 2,60(x-0) - 0,13(x-0,4) - 1,63(x-0,8)}$

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

6η Σειρά Ασκήσεων

⇒ Η παρεμβολή δίδεται από

$$
\begin{aligned}
N(x) = {} & 0,21 \\
& + 2,60\,(x-0) \\
& + 0,05\,(x-0)(x-0,4) \\
& - 1,79\,(x-0)(x-0,4)(x-0,8) \\
& + 1,49\,(x-0)(x-0,4)(x-0,8)(x-1,2) \\
& - 0,08\,(x-0)(x-0,4)(x-0,8)(x-1,2)(x-1,6)
\end{aligned}
$$

Με χρήση MATLAB.

x	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
y	0,21	1,25	2,31	2,70	2,65	3,20
	↕	↕	↕	↕	↕	↕
N(x)	0,21	1,25	2,31	2,70	2,65	3,20

OK

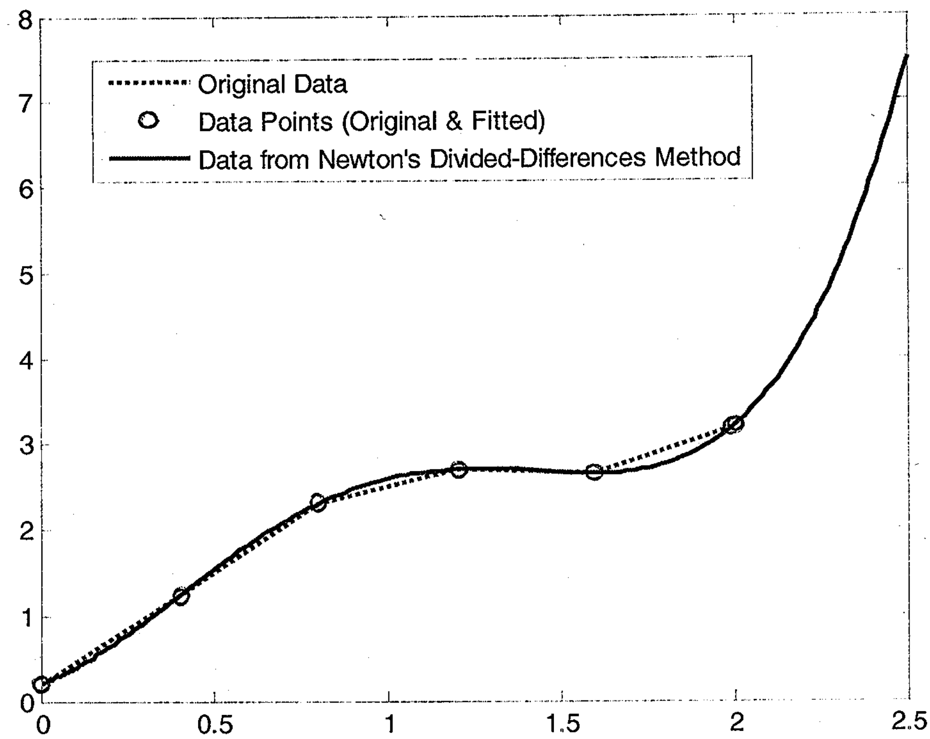
Τα σημεία που προκύπτουν από τη μέθοδο Διηρημένων Διαφορών ταυτίζονται με τα δεδομένα, επομένως το πολυώνυμο παρεμβολής είναι ορθό.

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
6η Σειρά Ασκήσεων

Οι γραφικές παραστάσεις δίδονται πιο κάτω.
fplot('0,21+2,60x+0,06(x)(x-0,4)+...', [0,2,5])



Οι τιμές για τα ζητούμενα σημεία είναι:

x_k	0,2	0,5	1,0	1,5	2,5
y_k	0,65	1,56	2,59	2,66	~~3,21~~ 7,5016

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
6η Σειρά Ασκήσεων

Πρόβλημα 4:

Να προσδιορισθεί η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων η οποία προσεγγίζει τη συνάρτηση $y = x^3 - 1$ στο διάστημα [0, 2].

$$y = x^3 - 1$$

Βασικά ζητούμε την ευθεία μεταξύ $x=0$ & $x=2$ που προσεγγίζει την $y=x^3-1$, ελαχιστοποιώντας το ~~τετραγων~~ άθροισμα τετραγώνων σφάλματος

$y(x) = x^3 - 1$ η αρχική εξίσωση

$f_1(x) = a_0 + a_1 x$ η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων.

Σφάλμα. $S = \sum_x \left[y(x) - f_1(x) \right]^2$

$$= \int_x \left[y(x) - f_1(x) \right]^2 dx$$

$$= \int_0^2 \left[y(x) - f_1(x) \right]^2 dx$$

αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο [0,2]

Για ελάχιστο S,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_0} &= 0 \\ \partial S / \partial a_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
6η Σειρά Ασκήσεων

Αναπτύσσοντας την σχέση, S,

$$S=\int_0^2\left[(x^3-1)^2+(a_0+a_1x)^2-2(x^3-1)(a_0+a_1x)\right]dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial a_0}=\int_0^2\left[2(a_0+a_1x)(1)-2(x^3-1)(1)\right]dx=0$$

$$\Rightarrow \left.2a_0x+2a_1\frac{x^2}{2}-\frac{2x^4}{4}+2x\right|_0^2=0$$

$$\Rightarrow 4a_0+4a_1-8+4=0$$

$$\Rightarrow 4a_0+4a_1=4 \Rightarrow a_0+a_1=1$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1}=\int_0^2\left[2(a_0+a_1x)(x)-2(x^3-1)(x)\right]dx=0$$

$$\Rightarrow \left.2a_0\frac{x^2}{2}+2a_1\frac{x^3}{3}-2\frac{x^5}{5}+\frac{2x^2}{2}\right|_0^2=0$$

$$\Rightarrow 4a_0+\frac{16}{3}a_1-\frac{64}{5}+4=0$$

$$\Rightarrow 4a_0+\frac{16}{3}a_1=\frac{44}{5}$$

$$\Rightarrow a_0+\frac{4}{3}a_1=\frac{11}{5}$$

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 200[illegible]

ΛΥΣΕΙΣ
6η Σειρά Ασκήσεων

Επομένως
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11/5 \end{bmatrix}$$

Λύση
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,60 \\ +3,60 \end{bmatrix}$$

⇒ Εξίσωση γραμμικής παρεμβολής ελαχίστων τετραγώνων,

$$f_1(x) = -2,60 + 3,60x$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται πιο κάτω.