Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

7η Σειρά Ασκήσεων

Παραδοτέα : 11-Απρ-2006

Γενικές Οδηγίες:

- Οι ασκήσεις είναι παραδοτέες κατά την έναρξη του μαθήματος την μέρα παραδόσεως τους.
- Καθυστερημένες ασκήσεις δεν θα γίνονται δεκτές για βαθμολόγηση εκτός από εξαιρετικές περιπτώσεις, και πάντα μόνο κατόπιν εκ των προτέρων συνεννόηση με τον διδάσκοντα.
- Η αντιγραφή απαγορεύεται αυστηρά!!!! Σε περίπτωση μη συμμόρφωσης οι ποινές θα είναι αυστηρές..
- Το όνομα και ηλεκτρονική διεύθυνση του υποβάλλοντα φοιτητή πρέπει να αναγράφονται ευκρινώς στη πρώτη σελίδα.

Θεματική Ενότητα:
Αριθμητική Παραγώγιση και Ολοκλήρωση

Πρόβλημα 1:

Να υπολογισθεί η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\ln(x)$ στο σημείο $x_o=2$ (με ακρίβεια 6 δεκαδικών), χρησιμοποιώντας (α) πρόσθιες διηρημένες διαφορές, και (β) όπισθεν διηρημένες διαφορές.

Πρόβλημα 2:

Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\ln(x)$ στο σημείο $x_o=2$ (με ακρίβεια 6 δεκαδικών), χρησιμοποιώντας (α) πρόσθιες διηρημένες διαφορές, και (β) όπισθεν διηρημένες διαφορές.

Πρόβλημα 3:

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$f(x)=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Χρησιμοποιώντας (α) τη Μέθοδο Τραπεζίων και ακρίβεια υπολογισμών 3 δεκαδικών, και (β) τη Μέθοδο Simpson και ακρίβεια υπολογισμών 3 δεκαδικών.

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

7η Σειρά Ασκήσεων

Θεματική Ενότητα:
Παρεμβολή

Πρόβλημα 4:

Δίδονται οι πιο κάτω τιμές (x, y) της συνάρτησης $y(x) = \sqrt{x}$

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
y(x)	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

Χρησιμοποιείστε τα πιο πάνω δεδομένα και παρεμβολικό πολυώνυμο Newton για να υπολογίσετε:

(α) τη τιμή $y(1.01) = \sqrt{1.01}$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών

(β) τη τιμή $y(1.28) = \sqrt{1.28}$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
7η Σειρά Ασκήσεων

Πρόβλημα 1:

Να υπολογισθεί η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\ln(x)$ στο σημείο $x_o=2$ (με ακρίβεια 6 δεκαδικών), χρησιμοποιώντας (α) πρόσθιες διηρημένες διαφορές, και (β) όπισθεν διηρημένες διαφορές.

(α) Πρόσθιες διηρημένες διαφορές

$$f'(x) = \frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h}$$

h	$f'(x)$
1.0	$f'(x) = \frac{f(2+1)-f(2)}{1} = \frac{\ln(3)-\ln(2)}{1} = 0.405465$
0.5	$f'(2) = \frac{f(2+0.5)-f(2)}{0.5} = 0.446287$
0.1	$f'(2) = \frac{f(2.1)-f(2)}{0.1} = 0.487902$
0.05	$f'(2) = \frac{f(2.05)-f(2)}{0.05} = 0.493852$
0.01	$f'(2) = \frac{f(2.01)-f(2)}{0.01} = 0.498754$
0.001	$f'(2) = \frac{f(2.001)-f(2)}{0.001} = 0.499875$
0.0005	$f'(2) = \frac{f(2.0005)-f(2)}{0.0005} = 0.499938$
0.00001	$f'(2) = \frac{f(2.00001)-f(2)}{0.00001} = 0.499999$

Επιμένω με σύγκλιση σε 2 διαδοχικές αριθμητικές προσεγγίσεις.

$\Rightarrow f'(2) \approx 0.5$

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
7η Σειρά Ασκήσεων

(β) Οπισθεν διαφορές

$$f'(x) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

h	$f'(x)$
3.0	$f'(2) = \frac{f(3) - f(3-1)}{1} = 0.405465$
0.001	$f'(2) = \frac{f(2.001) - f(2)}{0.001} = 0.499875$
0.0001	$f'(2) = \frac{f(2.0001) - f(2)}{0.0001} = 0.499988$
0.00001	$f'(2) = \frac{f(2.00001) - f(2)}{0.00001} = 0.499999$
0.000001	$f'(2) = \frac{f(2.000001) - f(2)}{0.000001} = 0.500000$

$\Rightarrow f'(2) \approx 0.500000$

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
7η Σειρά Ασκήσεων

Πρόβλημα 2:

Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\ln(x)$ στο σημείο $x_o=2$ (με ακρίβεια 6 δεκαδικών), χρησιμοποιώντας (α) πρόσθιες διηρημένες διαφορές, και (β) όπισθεν διηρημένες διαφορές.

(α) Πρόσθιες Διαφορές

$$f''(x) \approx \frac{f(x_o+h)-2f(x_o)+f(x_o-h)}{h^2}$$

h	$f''(x)$
0.1	$\frac{f(2.1)-2f(2)+f(1.9)}{0.1^2} \approx -0.250313$
0.001	$\frac{f(2.001)-2f(2)+f(1.999)}{0.001^2} \approx -0.250000$
0.0001	$\frac{f(2.0001)-2f(2)+f(1.9999)}{0.0001^2} \approx -0.250000$

σύγκλιση

$$\Rightarrow f''(2) \approx -0.250000$$

(β) Όπισθεν Διαφορές

$$f''(x) \approx \frac{f(x_o-2h)-2f(x_o-h)+f(x_o)}{h^2}$$

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
7η Σειρά Ασκήσεων

h	$f''(x)$
0.1	$f''(2) \approx \dfrac{f(2-0.2)-2f(1.9)+f(2)}{0.1^2} \approx -0.277393$
0.01	$\dfrac{f(2-0.02)-2f(1.99)+f(2)}{0.01^2} \approx -0.252522$
0.001	$\dfrac{f(2-0.002)-2f(1.999)+f(2)}{0.001^2} \approx -0.250250$
0.0001	$\dfrac{f(1.9998)-2f(1.9999)+f(2)}{0.0001^2} \approx -0.250025$
0.00001	$\dfrac{f(1.99998)-2f(1.99999)+f(2)}{0.00001^2} \approx -0.250000$

$$\Rightarrow f''(2) \approx -0.250000$$

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
7η Σειρά Ασκήσεων

Υποδιαιρέσεις	h	f(x)
5	0.2	3.342
10	0.1	2.361
15	0.0667	2.049
20	0.05	1.899
25	0.04	1.811
30	0.033	1.532
35	0.02857	1.716
40	0.025	1.687
50	0.02	1.648
60	0.01667	1.624
70	0.01429	1.607
80	0.0125	1.595
90	0.01111	1.586
100	0.01	1.579
110	0.0091	1.574
120	0.00833	1.570
130	0.00769	1.566
140	0.0071429	1.563
150	0.006667	1.561
160	0.00625	1.559
170	0.00588	1.557
180	0.00555	1.556
190	0.00526	1.555
200	0.005	1.554

Σύγκλιση
$f(x) \sim 1.554$

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
7η Σειρά Ασκήσεων

Πραγματική τιμή,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{asin}(x)\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} = 1.571$$

β) Μέθοδος Simpson

$$f(x) \equiv \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1})$$

για $k = 0, 1, 2, \ldots 2m$

$$h = \frac{b-a}{2m}$$

Κάνοντας χρήση MS-Excel, παίρνουμε τα πιο κάτω αποτελέσματα:

(Σημείωση: επειδή το ολοκλήρωμα δεν ορίζεται στο σημείο $x=1$, παίρνουμε σαν δεξιό όριο $b=0.999$ για να μπορέσουμε να βρούμε αριθμητική λύση)

Επίσης, $f(a)=f(0)=1.000$

$f(b) \approx f(0.999) \approx 22.366$

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
7η Σειρά Ασκήσεων

m	h	$\left(2h/3\right)\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k})$	$\left(4h/3\right)\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1})$	$f(x)$
5	1/10	0.335	0.920	2.034
10	1/20	0.398	0.957	1.744
20	1/40	0.438	0.984	1.616
40	1/80	0.465	1.002	1.564
60	1/120	0.476	1.010	1.552
70	1/140	0.480	1.013	1.549
80	1/160	0.483	1.015	1.547
90	1/180	0.485	1.017	1.546
100	1/200	0.487	1.019	1.545
110	1/220	0.489	1.020	1.545

Σύγκλιση

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \simeq 1.545$$

Πραγματική λύση, $f(x) = \operatorname{asin}(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \simeq 1.571$

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
7η Σειρά Ασκήσεων

Πρόβλημα 4:

Δίδονται οι πιο κάτω τιμές (x, y) της συνάρτησης $y(x)=\sqrt{x}$

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
y(x)	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

Χρησιμοποιείστε τα πιο πάνω δεδομένα και παρεμβολικό πολυώνυμο Newton για να υπολογίσετε:

(α) τη τιμή $y(1.01)=\sqrt{1.01}$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών

(β) τη τιμή $y(1.28)=\sqrt{1.28}$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών

x	y(x)						
1.00	1.00000						
		0.4940					
1.05	1.02470		-0.118				
		0.4822		0.067			
1.10	1.04881		-0.108		-0.135		
		0.4714		0.040		0.80	
1.15	1.07238		-0.102		0.065		
		0.4612		0.053		-0.78	
1.20	1.09544		-0.094		-0.130		
		0.4518		0.027			
1.25	1.11803		-0.090				-5.267
		0.4428					
1.30	1.14017						

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
και Μηχανικών Περιβάλλοντος

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
7η Σειρά Ασκήσεων

⇒ Πολυώνυμο παρεμβολής:

$$f_6(x) = 1.00000 + 0.4940(x-1) - 0.118(x-1)(x-1.05) + 0.067(x-1)(x-1.05)(x-1.10) - 0.135(x-1)(x-1.05)(x-1.10)(x-1.15) + 0.080(x-1)(x-1.05)(x-1.10)(x-1.15)(x-1.20) - 5.267(x-1)(x-1.05)(x-1.10)(x-1.15)(x-1.20)\cdot(x-1.25)$$

(α) Για $y(x)=\sqrt{1.01}$ θέτω $x=1.01$

$$\Rightarrow f_6(1.01) \approx 1.000000 + 0.004940 + 0.000047 + 0.000002 + 0.000001 + 0.000001 + 0.000001 = 1.004992$$

$$\Rightarrow \sqrt{1.01} \approx 1.00499.$$

(β) $y(x)=\sqrt{1.28}$

$$\Rightarrow f_6(1.28) \approx 1.000000 + 0.138320 - 0.007599 + 0.000777 + 0.000325 - 0.000011 - 0.000183 = 1.131538$$

$$\Rightarrow \sqrt{1.28} \approx 1.13154$$