

ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

7η Σειρά Ασκήσεων

Παραδοτέα : 11-Απρ-2006

Γενικές Οδηγίες:

- Οι ασκήσεις είναι παραδοτέες κατά την έναρξη του μαθήματος την μέρα παραδόσεως τους.
- Καθυστερημένες ασκήσεις δεν θα γίνονται δεκτές για βαθμολόγηση εκτός από εξαιρετικές περιπτώσεις, και πάντα μόνο κατόπιν εκ των προτέρων συνεννόηση με τον διδάσκοντα.
- Η αντιγραφή απαγορεύεται αυστηρά!!!! Σε περίπτωση μη συμμόρφωσης οι ποινές θα είναι αυστηρές..
- Το όνομα και ηλεκτρονική διεύθυνση του υποβάλλοντα φοιτητή πρέπει να αναγράφονται ευκρινώς στη πρώτη σελίδα.

Θεματική Ενότητα:
Αριθμητική Παραγωγή και Ολοκλήρωση

Πρόβλημα 1:

Να υπολογισθεί η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln(x)$ στο σημείο $x_0 = 2$ (με ακρίβεια 6 δεκαδικών), χρησιμοποιώντας (α) πρόσθιες διηρημένες διαφορές, και (β) όπισθεν διηρημένες διαφορές.

Πρόβλημα 2:

Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln(x)$ στο σημείο $x_0 = 2$ (με ακρίβεια 6 δεκαδικών), χρησιμοποιώντας (α) πρόσθιες διηρημένες διαφορές, και (β) όπισθεν διηρημένες διαφορές.

Πρόβλημα 3:

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Χρησιμοποιώντας (α) τη Μέθοδο Τραπεζίων και ακρίβεια υπολογισμών 3 δεκαδικών, και (β) τη Μέθοδο Simpson και ακρίβεια υπολογισμών 3 δεκαδικών.



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

7η Σειρά Ασκήσεων

Θεματική Ενότητα:
Παρεμβολή**Πρόβλημα 4:**Δίδονται οι πιο κάτω τιμές (x, y) της συνάρτησης $y(x) = \sqrt{x}$

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
y(x)	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

Χρησιμοποιήστε τα πιο πάνω δεδομένα και παρεμβολικό πολυώνυμο Newton για να υπολογίσετε:

- (α) τη τιμή $y(1.01) = \sqrt{1.01}$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών
 (β) τη τιμή $y(1.28) = \sqrt{1.28}$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

7η Σειρά Ασκήσεων

Πρόβλημα 1:

Να υπολογισθεί η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln(x)$ στο σημείο $x_0 = 2$ (με ακρίβεια 6 δεκαδικών), χρησιμοποιώντας (α) πρόσθιες διηρημένες διαφορές, και (β) όπισθεν διηρημένες διαφορές.

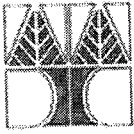
(α) Μπροσθιες Διηρημένες Διαφορές

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

h	$f'(x)$
1.0	$f'(x) = \frac{f(2+1) - f(2)}{1} = \frac{\ln(3) - \ln(2)}{1} = 0.405465$
0.5	$f'(2) = \frac{f(2+0.5) - f(2)}{0.5} = 0.446287$
0.1	$f'(2) = \frac{f(2.1) - f(2)}{0.1} = 0.487902$
0.05	$f'(2) = \frac{f(2.05) - f(2)}{0.05} = 0.493852$
0.01	$f'(2) = \frac{f(2.01) - f(2)}{0.01} = 0.498754$
0.001	$f'(2) = \frac{f(2.001) - f(2)}{0.001} = 0.499875$
0.0005	$f'(2) = \frac{f(2.0005) - f(2)}{0.0005} = 0.499938$
0.00001	$f'(2) = \frac{f(2.00001) - f(2)}{0.00001} = 0.499999$

Επιμνηστεύστε τις τιμές
σε 2 διαδοχικές αριθμητικές
προσεγγίσεις.

$$\Rightarrow f'(2) \approx 0.5$$



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

7η Σειρά Ασκήσεων

(p) Όπως με διαφορές

$$f'(x) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

$$h \quad f'(x)$$

$$3.0 \quad f'(2) = \frac{f(3) - f(3-1)}{1} = 0.405465$$

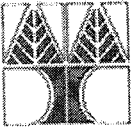
$$0.001 \quad f'(2) = \frac{f(2.001) - f(2)}{0.001} = 0.499875$$

$$0.0001 \quad f'(2) = \frac{f(2.0001) - f(2)}{0.0001} = 0.499988$$

$$0.00001 \quad f'(2) = \frac{f(2.00001) - f(2)}{0.00001} = 0.499999$$

$$0.000001 \quad f'(2) = \frac{f(2.000001) - f(2)}{0.000001} = 0.500000$$

$$\Rightarrow f'(2) \approx 0.500000$$



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

7η Σειρά Ασκήσεων

Πρόβλημα 2:

Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln(x)$ στο σημείο $x_0 = 2$ (με ακρίβεια 6 δεκαδικών), χρησιμοποιώντας (α) πρόσθιες διηρημένες διαφορές, και (β) όπισθεν διηρημένες διαφορές.

(α) Μπρόσθιες Διαφορές

$$f''(x) \approx \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

$$\frac{h}{0.1} \quad \frac{f''(x)}{\frac{f(2.1) - 2f(2) + f(1.9)}{0.1^2}} \approx -0.250313$$

$$0.001 \quad \frac{f(2.001) - 2f(2) + f(1.999)}{0.001^2} \approx -0.250000$$

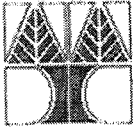
$$0.0001 \quad \frac{f(2.0001) - 2f(2) + f(1.9999)}{0.0001^2} \approx -0.250000$$

} σύγκριση

$$\Rightarrow f''(2) \approx -0.250000$$

(β) Όπισθεν Διαφορές

$$f''(x) \approx \frac{f(x_0-2h) - 2f(x_0-h) + f(x_0)}{h^2}$$



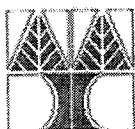
ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

7η Σειρά Ασκήσεων

h	$f''(x)$
0.1	$f''(2) \approx \frac{f(2-0.2) - 2f(1.9) + f(2)}{0.1^2} \approx -0.277393$
0.01	$f''(2) \approx \frac{f(2-0.02) - 2f(1.99) + f(2)}{0.01^2} \approx -0.252522$
0.001	$f''(2) \approx \frac{f(2-0.002) - 2f(1.999) + f(2)}{0.001^2} \approx -0.250250$
0.0001	$f''(2) \approx \frac{f(1.9998) - 2f(1.9999) + f(2)}{0.0001^2} \approx -0.250025$
0.00001	$f''(2) \approx \frac{f(1.99998) - 2f(1.99999) + f(2)}{0.00001^2} \approx -0.250000$
	$\Rightarrow f''(2) \approx -0.250000$



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

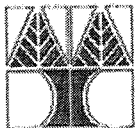
Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

7η Σειρά Ασκήσεων

<u>Υποδιαίρεσεις</u>	<u>h</u>	<u>$f(x)$</u>
5	0.2	3.342
10	0.1	2.361
15	0.0667	2.049
20	0.05	1.899
25	0.04	1.811
30	0.033	1.532
35	0.02857	1.716
40	0.025	1.687
50	0.02	1.648
60	0.01667	1.624
70	0.01429	1.607
80	0.0125	1.595
90	0.01111	1.586
100	0.01	1.579
110	0.0091	1.574
120	0.00833	1.570
130	0.00769	1.566
140	0.0071429	1.563
150	0.00667	1.561
160	0.00625	1.559
170	0.00588	1.557
180	0.00555	1.556
190	0.00526	1.555
200	0.005	1.554

Σύγκριση
 $f(x) \sim 1.554$



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

7η Σειρά Ασκήσεων

Πραγματική τιμή,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = a \sin(x) \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} = 1.571$$

(β) Μέθοδος Simpson

$$f(x) \equiv \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{h}{3} [f(a) + f(b)] + \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^m f(x_{2k-1})$$

$$\text{για } k = 0, 1, 2, \dots, 2m$$

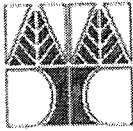
$$h = \frac{b-a}{2m}$$

Κάνοντας χρήση MS-Excel, παίρουμε τα πιο κάτω αποτελέσματα:

(Σημείωση: Επειδή το ολοκλήρωμα δεν ορίζεται στο σημείο $x=1$, παίρουμε ως δεξιό όριο $b=0.999$ για να αποφύγουμε να βρούμε αριθμητική τιμή)

$$\text{Επίσης, } f(a) = f(0) = 1.000$$

$$f(b) \approx f(0.999) \approx 22.366$$



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ

7η Σειρά Ασκήσεων

$$m \quad h \quad \left(\frac{2h}{3}\right) \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) \quad \left(\frac{4h}{3}\right) \sum_{k=1}^m f(x_{2k-1}) \quad f(x)$$

5	1/10	0.335	0.920	2.034
10	1/20	0.398	0.957	1.744
20	1/40	0.438	0.984	1.616
40	1/80	0.465	1.002	1.564
60	1/120	0.476	1.010	1.552
70	1/140	0.480	1.013	1.549
80	1/160	0.483	1.015	1.547
90	1/180	0.485	1.017	1.546
100	1/200	0.487	1.019	1.545
110	1/220	0.489	1.020	1.545

Σύμμετρο

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx 1.545$$

Πραγματική λύση, $f(x) = \arcsin(x) \Big|_0^1 \approx \frac{\pi}{2} \approx 1.571$



ΠΠΜ 201: Αριθμητική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2006

ΛΥΣΕΙΣ
7η Σειρά Ασκήσεων

Πρόβλημα 4:

Δίδονται οι πιο κάτω τιμές (x, y) της συνάρτησης $y(x) = \sqrt{x}$

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
y(x)	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

Χρησιμοποιήστε τα πιο πάνω δεδομένα και παρεμβολικό πολυώνυμο Newton για να υπολογίσετε:

(α) τη τιμή $y(1.01) = \sqrt{1.01}$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών

(β) τη τιμή $y(1.28) = \sqrt{1.28}$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών

x	y(x)						
1.00	1.00000						
		0.4940					
1.05	1.02470		-0.118				
		0.4822		0.067			
1.10	1.04881		-0.108		-0.135		
		0.4714		0.040		0.80	
1.15	1.07238		-0.102		0.065		
		0.4612		0.053		-0.78	
1.20	1.09544		-0.094		-0.130		
		0.4518		0.027			
1.25	1.11803		-0.090				-5.267
		0.4428					
1.30	1.14017						

